

齒輪技術入門篇

齒輪的功能

齒輪為最常用的機械元件之一，被廣泛地使用在機械傳動裝置中。
齒輪之所以能有如今這般的普及，其主要敘述如下。

小自鐘錶用齒輪，大至船舶渦輪機用大型齒輪，它都可以確實地傳動動力。

經由選擇不同齒數的組合，可以得到任意且正確的轉速比。
利用齒輪組合數的增減，可以自由地變換回轉軸之間的相互關係位置。
可以使用在平行軸，相交軸，交錯軸等各種軸之間的傳動上。

本齒輪技術入門篇是為了提供正確使用齒輪的基礎知識而編。
本篇是為幫助客戶能正確地從「KHK3009」中選用齒輪，
因此在這裏以齒輪技術為中心介紹一些選用齒輪時所必需的基本知識。



齒輪入門篇目錄

1	齒輪的種類及用語.....	3
1.1	齒輪的種類.....	3
1.2	齒輪幾何記號及用語.....	5
2	齒輪鎖鏈的轉速比和回轉方向.....	7
2.1	一段齒輪機構.....	7
2.2	二段齒輪機構.....	8
3	漸開線齒輪.....	9
3.1	漸開線齒輪的齒形及尺寸.....	9
3.2	漸開線曲線.....	10
3.3	漸開線齒輪的咬合.....	11
3.4	漸開線齒形的創生.....	11
3.5	下切.....	12
3.6	齒輪的轉位.....	12
4	齒輪的尺寸計算.....	13
4.1	正齒輪.....	13
4.2	內齒輪.....	18
4.3	螺旋齒輪.....	21
4.4	傘形齒輪.....	28
4.5	交錯軸螺旋輪.....	34
4.6	圓筒蝸輪組.....	36

1 齒輪的種類及用語

1.1 齒輪的種類

齒輪有很多種類，其分類法最通常的是根據齒輪軸性來區分，分成平行軸，相交軸及交錯軸三種類型：

平行軸齒輪包括正齒輪，螺旋齒輪，內齒輪，齒條及螺旋齒條等。

相交軸齒輪有直齒傘形齒輪，彎齒傘形齒輪，零度傘形齒輪等。

交錯軸齒輪有交錯軸螺旋齒輪，蝸輪蝸桿，戟齒輪等。

表 1.1 中，列出了常用齒輪的分類情況。

表 1.1 齒輪的分類和種類

齒輪的分類	齒輪的種類	效率 (%)
平行軸	正齒輪	98.0—99.5
	齒條	
	內齒輪	
	螺旋齒輪	
	螺旋齒條	
相交軸	直齒傘形齒輪	98.0—99.0
	彎齒傘形齒輪	
	零度傘形齒輪	
交錯軸	圓筒蝸桿蝸輪	30.0—90.0
	交錯螺旋齒輪	70.0—95.0

此表中所列出的效率為傳動效率，不包括軸承及攪拌潤滑等的損失。

齒輪的效率是齒輪在正常裝配狀況下的傳動效率。如果出現安裝不正確的情況，特別是傘形齒輪裝配距離不正確而導致圓錐交點有誤差時，其效率會顯著下降。

(1) 平行軸的齒輪

① 正齒輪 (Spur Gears)

齒筋與軸心平行的圓筒齒輪。

因為易於加工，因此在動力傳動上使用最為廣泛。

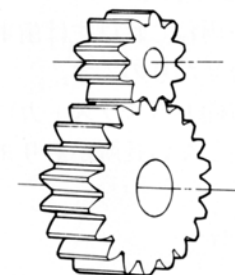


圖 1.1 正齒輪

② 齒條 (Racks)

與正齒輪咬合的直線條狀齒輪。

可以看成是標準圓直徑無限大的正齒輪之特殊情況。

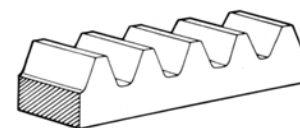


圖 1.2 齒條

③ 內齒輪 (Internal Gears)

與正齒輪相咬合，在圓環的內側切齒的齒輪。

主要使用在行星齒輪傳動機構及齒輪聯軸器等應用上。

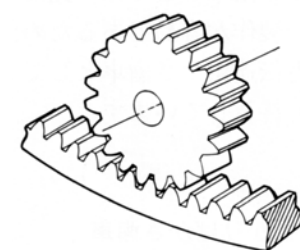


圖 1.3 內齒輪與外齒輪

④ 螺旋齒輪 (Helical Gears)

齒筋為螺旋線的圓筒齒輪。

因為比正齒輪強度高且運轉平穩，被廣泛使用。

唯轉動時會產生軸向推力。

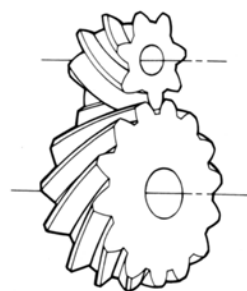


圖 1.4 螺旋齒輪

⑤ 螺旋齒條 (Helical Racks)

與螺旋齒輪相咬合的條狀齒輪。

相當於螺旋齒輪的節徑變成無限大時的情形。

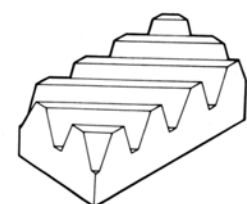


圖 1.5 螺旋齒條

⑥ 人字齒輪

(Herringbone Gears)

齒筋為左旋及右旋的兩個螺旋齒輪組合而成的齒輪。

有不產生軸向推力的優點。

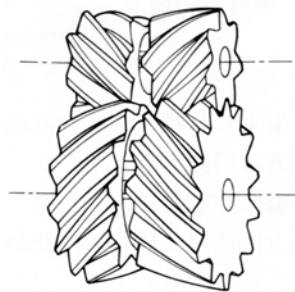


圖 1.6 人字齒輪

(2) 相交軸齒輪

① 直齒傘形齒輪

(Straight Bevel Gears)

齒筋與節錐的母線一致的傘形齒輪。

在傘形齒輪中，屬於比較容易製造的類型，所以，作為傳動用傘形齒輪應用最為廣泛。

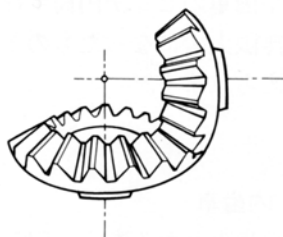


圖 1.7 直齒傘形齒輪

② 彎齒傘形齒輪

(Spiral Bevel Gears)

齒筋為曲線，帶有螺旋角的傘形齒輪。

雖然與直齒傘形齒輪相比，製作難度較大，但是其高強度及低噪音的特性使彎齒傘形齒輪也被廣泛應用。

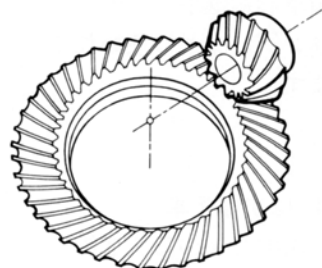


圖 1.8 彎齒傘形齒輪

③ 零度傘形齒輪

(Zero Bevel Gears)

螺旋角為零度的彎齒傘形齒輪。

同時具有直齒和彎齒傘形齒輪的特徵，尤其齒面的受力情形與直齒傘形齒輪相同。

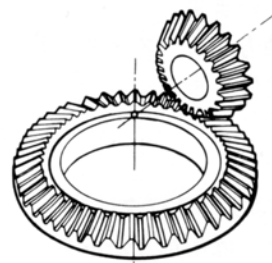


圖 1.9 零度傘形齒輪

(3) 交錯軸齒輪

① 圓筒蝸輪組

(Worm Gears)

圓筒蝸輪組是圓筒蝸桿和與之咬合的蝸輪的總稱。

運轉平靜及單對即可獲得大轉速比為其最大的特徵，但是有效率低的缺點。

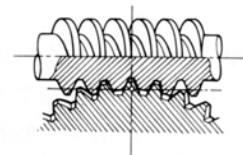


圖 1.10 圓筒蝸桿組

② 交錯螺旋齒輪

(Screw Gears)

螺旋齒輪組在交錯軸間傳動時的名稱。可和螺旋齒輪或正齒輪搭配使用。

運轉雖然平穩，但只適合於使用在輕負荷的情況下。

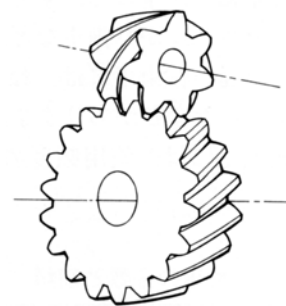


圖 1.11 交錯螺旋齒輪

(4) 其他特殊齒輪

① 面齒輪 (Face Gears)

可與正齒輪或螺旋齒輪咬合的圓盤狀齒輪。

在直角軸及交錯軸間傳動。

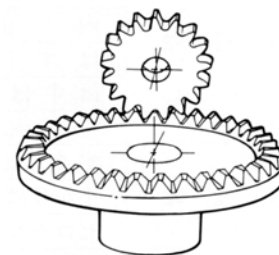


圖 1.12 面齒輪

② 鼓形蝸輪組

(Concave Worm Gears)

鼓形蝸桿及與之咬合的蝸輪的總稱。

雖然製造比較困難，但比起圓柱蝸桿組，可以傳動大的負荷。

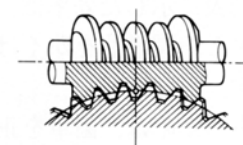


圖 1.13 鼓形蝸輪組

③ 戟齒輪 (Hypoid Gears)

在交錯軸間傳動的圓錐形齒輪。

大小齒輪經過偏移加工，與傘形（彎齒）齒輪相似，但咬合原理完全不同（是一種雙曲面間的傳動）非常複雜。

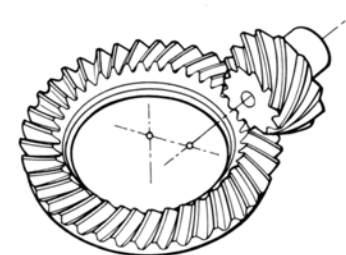


圖 1.14 戟齒輪

1.2 齒輪幾何記號及用語

在本產品目錄中使用的齒輪幾何記號及用語列於表 1.2 ~ 1.6 中。隨著國際化的發展，將齒輪幾何記號的表示與國際標準統一為目的，日本標準調查會 (JIS) 依據

ISO 標準對齒輪記號及用語的規定予以修改。本產品目錄的技術資料中所使用的齒輪幾何記號及用語也與 ISO 規格一致。

表 1.2 直線上及圓周上的尺寸

用語	代號
中心距離	a
標準節距	p
軸直角節距	p_t
齒直角節距	p_n
軸向節距	p_x
法線節距	p_b
軸直角法線節距	p_{bt}
齒直角法線節距	p_{bn}
全齒深	h
齒冠高	h_a
齒根高	h_f
弦齒高	h_a
固定弦齒高	h_c
有效齒高	h'
圓弧齒厚	s
齒直角圓弧齒厚	s_n
軸直角圓弧齒厚	s_t
齒頂厚	s_a
基圓圓弧齒厚	s_b
弦齒厚	s
固定弦齒厚	\bar{s}_c
跨齒厚	W
齒溝	e
齒頂隙	c
圓周齒隙	j_i
法線齒隙	j_n
徑向齒隙	j_f
回轉角度齒隙	j_θ
齒幅	b
有效齒幅	b'
導程	p_z
咬合長度	g_a
遠離咬合長度	g_f
近接咬合長度	g_a
重疊咬合長度	g_β
標準圓直徑	d
節圓直徑	d'
齒頂圓直徑	d_a
基圓直徑	d_b
齒底圓直徑	d_f
中央標準圓直徑	d_m
小端齒頂圓直徑	d_i
標準圓半徑	r
節圓半徑	r'
齒頂圓半徑	r_a
基圓半徑	r_b
齒底圓半徑	r_f
齒形曲率半徑	ρ
圓錐距離	R
背錐距離	R_v

表 1.3 角度尺寸

用語	代號
標準壓力角	α
咬合壓力角，工作壓力角	α'
刀具壓力角	α_o
軸直角壓力角	α_t
齒直角壓力角	α_n
軸向壓力角	α_x
軸直角咬合壓力角	α'_t
齒頂壓力角	α'_a
齒直角咬合壓力角	α'_n
標準圓筒螺旋角	β
節圓筒螺旋角	β'
中央螺旋角	β_m
齒頂圓筒螺旋角	β_a
基圓筒螺旋角	β_b
標準圓筒導角	γ
節圓筒導角	γ'
齒頂圓筒導角	γ_a
基圓筒導角	γ_b
軸角	Σ
標準圓錐角	δ
節圓錐角	δ'
齒頂圓錐角	δ_a
齒底圓錐角	δ_f
齒冠角	θ_a
齒根角	θ_f
軸直角接觸角	ζ
重疊角	ζ_a
總接觸角	ζ_β
齒厚之半角	ψ
齒頂齒厚之半角	ψ_a
齒溝之半角	η
冠齒輪之節距角	τ
α 角的漸開線函數	$\text{inv}\alpha$

表 1.4 數值及比率

用語	記號
齒數	z
等價齒輪齒數	z_v
牙數或小齒輪齒數	z_1
齒數比	u
轉速比	i
模數	m
軸直角模數	m_t
齒直角模數	m_n
軸向模數	m_x
周節	P
軸直角咬合率	ε_a
重疊咬合率	ε_β
全咬合率	ε_γ
角速度	ω
線速度	v
回轉數	n
轉位係數	x
齒直角轉位係數	x_n
軸直角轉位係數	x_t
中心距離修正係數	y

表 1.5 其他

用語	記號
切線力(圓周)	F_t
軸向力	F_x
徑向力	F_r
梢(球)直徑	d_p
理想的梢(球)直徑	d'_p
跨梢(球)尺寸	M
通過梢(球)中心之壓力角	ϕ
摩擦係數	μ
圓弧齒厚係數	K

表 1.6 精度

用語	記號
單一節距誤差	f_{pt}
鄰接節距誤差	f_v 或 f_{pv}
總累積節距誤差	F_p
總齒形誤差	F_α
齒溝偏擺	F_f
總齒筋誤差	F_β

以上的記號使用上加注下標 1 或 2, 以區別大齒輪與小齒輪, 蝸桿與蝸輪, 驅動齒輪與被動齒輪等。

表 1.7 為希臘字母表。

表 1.7 希臘字母表

大寫字母	小寫字母	拼音
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	Mu
N	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
O	\omicron	Omicron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Upsilon
Φ	ϕ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

2 齒輪鎖鏈的轉速比和回轉方向

齒輪是無法單獨行使動力的傳達，至少要有兩個以上的齒輪相互咬合才能達到傳動目的。

在這裏，我們先從最單純簡單的一段齒輪機構與二段齒輪機構來說明，然後再深入到行星機構及封閉拘束齒輪系。

2.1 一段齒輪機構

一對齒輪咬合後而形成的齒輪系稱為一段齒輪機構。一段齒輪機構如圖 2.1 所示。

設一段齒輪機構驅動齒輪的齒數為 z_1 ，轉速為 n_1 ，被動齒輪的齒數為 z_2 ，轉速為 n_2 ，轉速比的計算式如下：

$$\text{轉速比} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2.1)$$

根據轉速比的數值，可將一段齒輪機構分為三類：

轉速比 < 1 增速齒輪機構 $n_1 < n_2$

轉速比 $= 1$ 等速齒輪機構 $n_1 = n_2$

轉速比 > 1 減速齒輪機構 $n_1 > n_2$

圖 2.1 中，(A) 和 (B) 為外齒輪咬合的一段齒輪機構，驅動齒輪與被動齒輪的回轉方向相反。

圖 2.1 中，(C) 為外齒輪與內齒輪相咬合的情況，轉向相同。

圖 2.1 中，(D) 為蝸輪蝸桿咬合的情況，蝸輪的回轉方向會因螺旋方向而異。

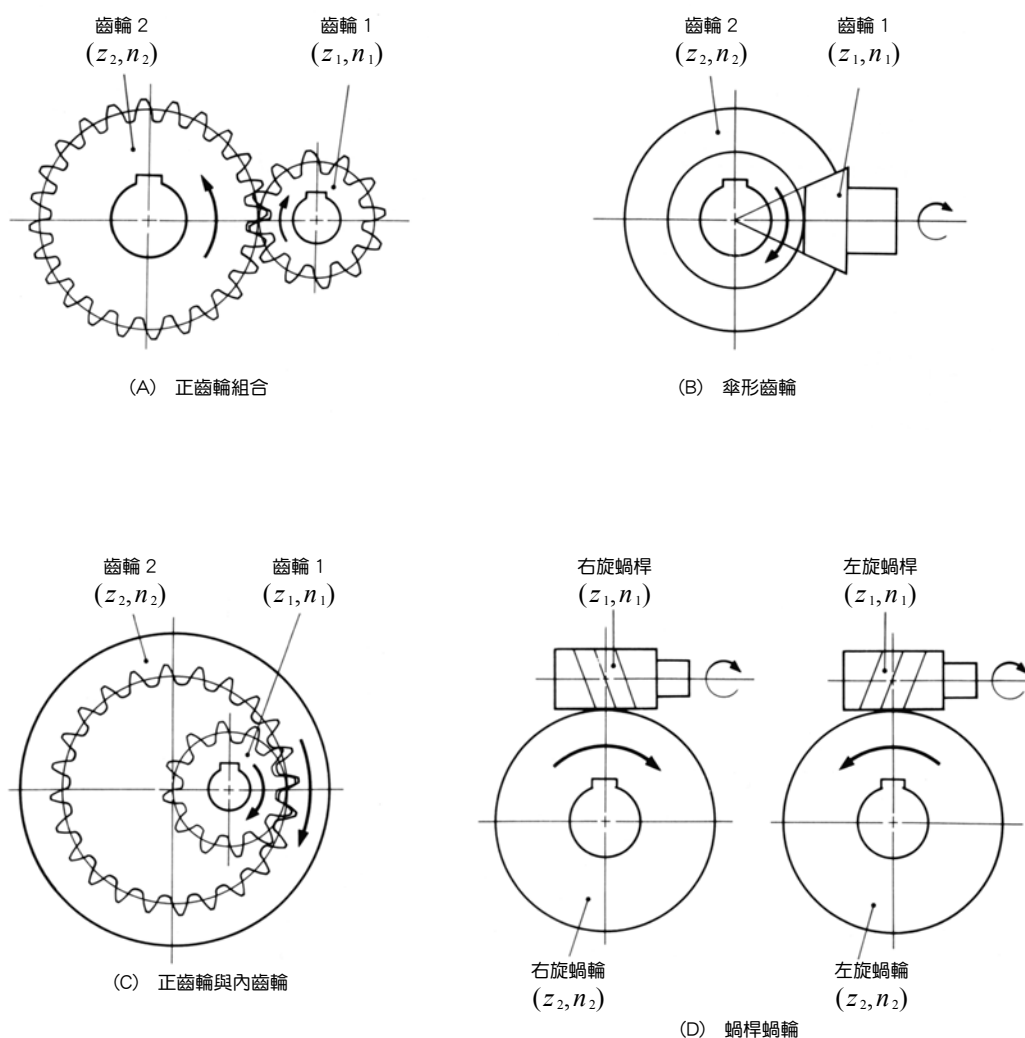


圖 2.1 一段齒輪機構

除此之外，還有使用齒條的一段齒輪機構。在這個一段齒輪機構中，若小齒輪的齒數為 z_1 的話，小齒輪在回轉 θ 角度後，齒條移動量 l 的大小可根據下式計算：

$$l = \frac{z_1 \theta}{360} \times \pi m \quad (2.2)$$

公式中的 πm 為齒條的標準節距。

2.2 二段齒輪機構

二段齒輪機構是用二組一段齒輪機構所構成的。圖 2.2 為二段齒輪機構的構造。

在這裏，假設第一段齒輪中齒輪 1 為驅動齒輪，則此齒輪機構的轉速比為：

$$\text{轉速比} = \frac{z_2}{z_1} \times \frac{z_4}{z_3} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{n_3}{n_4} \quad (2.3)$$

其中 $n_2 = n_3$

在這個二段齒輪機構中，齒輪 1 和齒輪 4 的回轉方向相同。

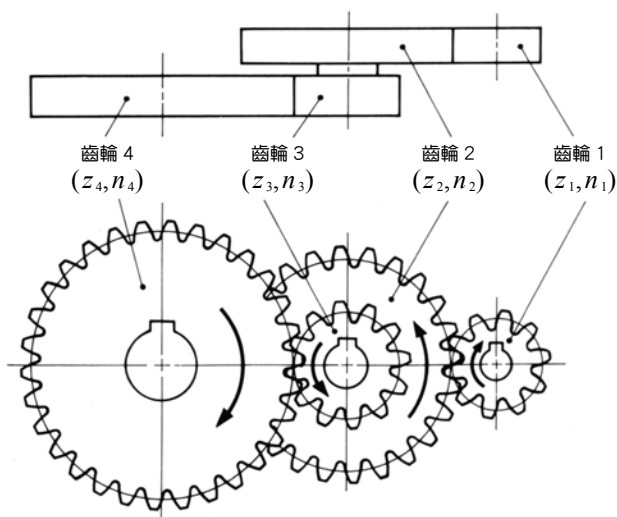


圖 2.2 二段齒輪機構

如果機構中的齒輪 2 與齒輪 3 的齒數相等時，就將變成圖 2.3 所示的機構。

在圖 2.3 的機構中，齒輪 2 對轉速比不產生影響，稱之為惰輪。

因此，可以將此機構看成是使用了惰輪的一段齒輪機構，其轉速比為：

$$\text{轉速比} = \frac{z_2}{z_1} \times \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_3}{z_1} \quad (2.4)$$

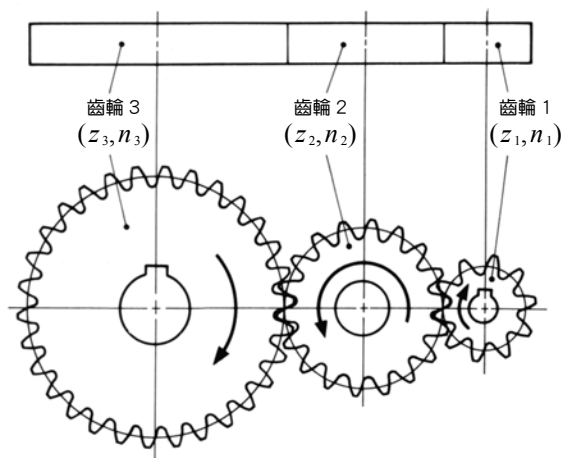


圖 2.3 使用了惰輪的一段齒輪機構

3 漸開線齒輪

漸開線齒形是動力傳達用齒輪中最具有代表性的齒形，使用也最為普遍。

漸開線齒輪的特點是製作容易，在中心距離有少許誤差的情形下也能平穩地咬合運轉。

3.1 漸開線齒輪的齒形及尺寸

輪齒的大小一般以模數 m (單位 :mm) 來表示。模數乘以 π 所得的值稱為標準節距 p (節距)。

$$p = \pi m \quad (3.1)$$

標準 JIS B 1701-1973 漸開線齒輪的齒形及尺寸中所規定的模數標準值分為三個系列如表 3.1。齒條齒形的模數實際大小如圖 3.1 所示。

表 3.1 模數標準值 單位 mm

第 1 系列	第 2 系列	第 3 系列	第 1 系列	第 2 系列	第 3 系列
0.1				3.5	3.75
0.2	0.15		4	4.5	
0.3	0.25		5	5.5	
0.4	0.35		6		6.5
0.5	0.45		8	7	
0.6	0.55		10	9	
	0.7	0.65	12	11	
0.8	0.75		16	14	
1	0.9		20	18	
1.25			25	22	
1.5			32	28	
2	1.75		40	36	
2.5	2.25		50	45	
3	2.75				
		3.25			

(注) 優先選用第 1 系列。

另外還有使用徑節 P (D.P.) 來表示輪齒的大小的方法，主要使用在美國。

徑節 P 與模數 m 的關係為： $m = 25.4/P$

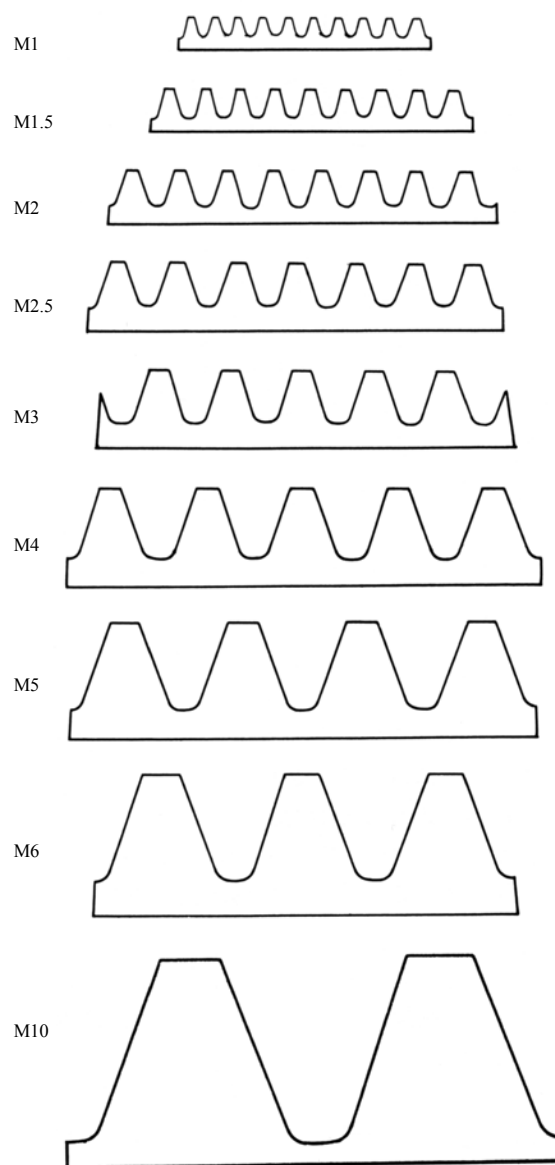


圖 3.1 齒條齒形的模數實際大小圖

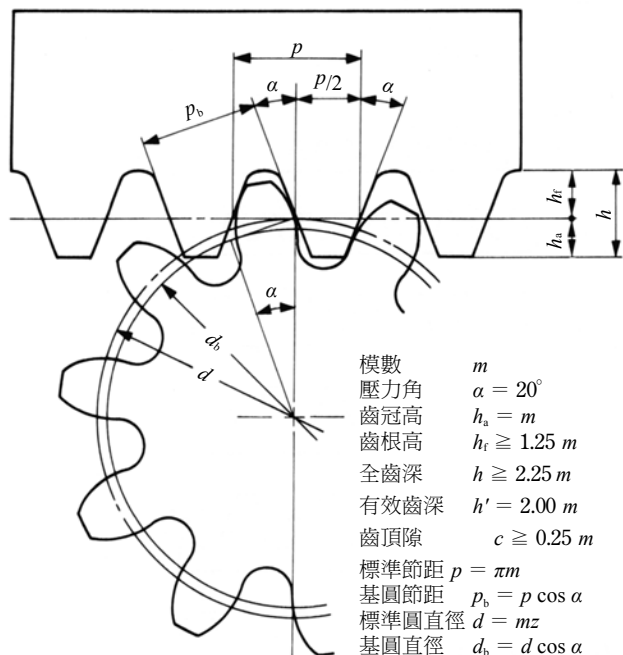


圖 3.2 標準齒條的齒形及尺寸(全齒深齒形)

另外，還有使用周節 $P(C.P.)$ 來做為表示輪齒大小的單位。常用在給進機構中，給進量可以很容易地調成整數。

在齒形中以標準所規定的壓力角 $\alpha = 20^\circ$ ，全齒深漸開線齒形使用範圍最為普遍。

漸開線齒輪的標準齒條之齒形及尺寸列在圖 3.2 中。齒形被稱為全齒深齒形，標準中規定齒冠高 $h_a = 1.0m$ ，齒根高 $h_f \geq 1.25m$ 。

另外，還有齒深低於全齒深的矮齒齒形和齒深高於全齒深的高齒齒形。

矮齒的齒深以 $h_a = 0.8m$ ， $h_f \geq 1.0m$ 的標準矮齒最為常見，矮齒的優點是輪齒的強度較高，而缺點是咬合率較低。

以漸開線齒輪的節距 p 乘以齒數，可以得出正齒輪標準圓的周長。

$$d\pi = \pi mz \quad (3.2)$$

經由 (3.2) 算式，可以導出正齒輪標準圓直徑 d (節徑) 的公式 (3.3)。

$$d = mz \quad (3.3)$$

3.2 漸開線曲線 (Involute Curve)

從漸開線曲線的繪圖方法上可充分顯示出漸開線 (或稱為漸伸線) 正如其名。

如圖 3.3 所示，將一條一端固定在圓筒上的線，在張緊的情形下向外反轉鬆開，此時線的另一端所畫出的軌跡稱為漸開線曲線。而這個圓筒是此漸開線的基圓。沿著這個基圓轉動一條直尺，直尺上的一點所經過的軌跡也為漸開線。根據漸開線的性質，弧 ac 與直線 bc 長度必須相等，所以：

$$\tan \alpha = \frac{bc}{oc} = \frac{r_b \theta}{r_b} = \theta \text{ (弧度)} \quad (3.4)$$

根據圖 3.3， θ 可以表示為 $\text{inv } \alpha + \alpha$ ，代入算式 (3.4) 中：

$$\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \alpha \quad (3.5)$$

α 函數的 $\text{inv } \alpha$ 被稱為漸開線函數。漸開線函數 $\text{inv } \alpha$ 在齒輪的計算中使用率非常高。

以基圓的圓心 O 當成 xy 直角座標的原點，則漸開線函數在此直角座標系中可用下列公式表示。

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(\text{inv } \alpha) \\ &= \frac{r_b}{\cos \alpha} \cos(\text{inv } \alpha) \\ y &= r \sin(\text{inv } \alpha) \\ &= \frac{r_b}{\cos \alpha} \sin(\text{inv } \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中 $r = r_b / \cos \alpha$

用這個公式，可以簡單地描繪出漸開線齒形。

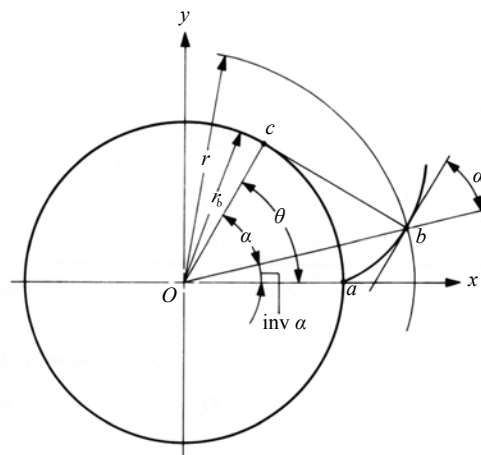


圖 3.3 漸開線曲線

3.3 漸開線齒輪的咬合

圖 3.4 所示為一對標準正齒輪的嚙合狀態。

如圖所示，漸開線齒輪齒面的接觸點會在兩基圓的內公切線（作用線）上移動。因此，能成為一對齒輪的咬合條件，必須要在法線節距 p_b （基圓節距）相等的情形下。

$$p_b = \pi m \cos \alpha \quad (3.7)$$

經由公式 (3.7) 可以看出，一對齒輪咬合的條件不僅僅是模數 m 必須相等，壓力角 α 也必須相等，如此齒輪才能正確地咬合。

圖 3.4 中作用線上的長度 ab 被稱為嚙咬合線長度（咬合長度）。

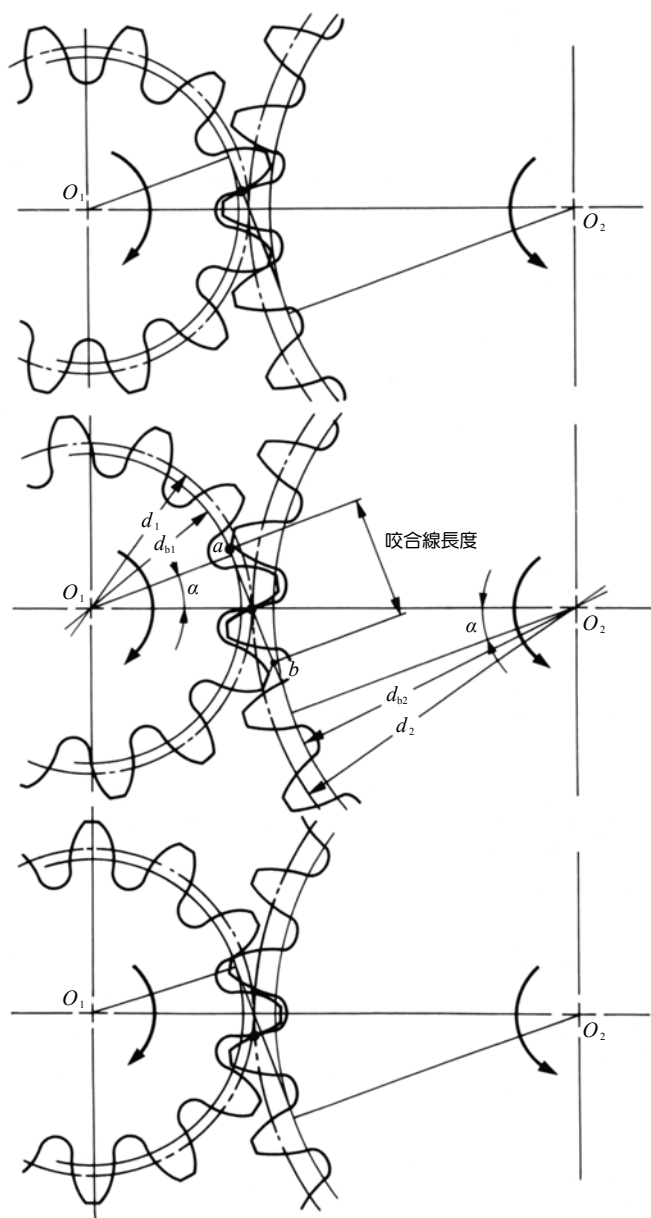


圖 3.4 漸開線齒輪的咬合

咬合線長度 ab 除以法線節距 p_b 的值被稱為軸直角咬合率（正面咬合率）。

$$\text{軸直角咬合率 } \varepsilon_\alpha = \frac{\text{咬合線長度 } ab}{\text{法線節距 } p_b} \quad (3.8)$$

齒輪要維持連續平穩地傳動，咬合率必須大於 1。

因此，漸開線齒輪咬合時，模數 m 和壓力角 α 是十分重要的要素。

3.4 漸開線齒形的創生 (Generation)

利用齒條形刀具可以很容易地加工出漸開線齒形。使用創生原理而製造的切齒機械，較具代表性的有滾齒機及插齒機。

圖 3.5 顯示利用創生原理加工漸開線齒形時的模樣。

標準正齒輪在創生時，齒輪的標準圓直徑（節徑）和齒條形刀具的標準節線在不產生滑動的條件下相切滾動，即可創生出如圖 3.5 所示的漸開線齒形。

漸開線齒輪的創生切削機械，還有另一種使用小齒輪形切齒刀的插齒機。這種插齒機，不但可以加工外齒輪，還可以加工內齒輪。

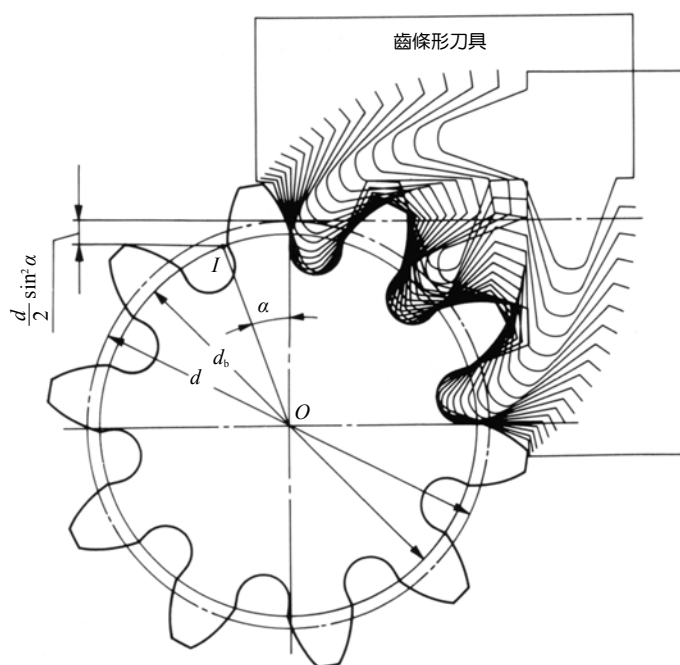


圖 3.5 標準正齒輪的創生
($\alpha = 20^\circ, z = 10, x = 0$)

3.5 下切 (Under Cut)

如圖 3.5 中所示的小齒數標準正齒輪切齒加工時，刀具切削深度超過干涉點 I 時，所產生的下切現象。

下切是刀具的刃部先端直線部分 () 將齒輪齒根部的齒形曲線切掉之現象。

設標準正齒輪的刀具先端直線部的深度為 $1 \cdot m$ ，則不產生下切的條件為：

$$m \leq \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha \quad (3.9)$$

根據這個條件，導出標準正齒輪下切界限齒數 z 的公式 (3.10)。

$$z = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \quad (3.10)$$

標準壓力角 $\alpha = 20^\circ$ 時，下切界限齒數為 $z = 17$ 。不過，若在強度及咬合率等方面沒有問題時，即使是齒數在 16 以下也可以使用。

3.6 齒輪的轉位 (Profile Shifting)

防止下切的方法之一是齒輪的轉位。轉位有正轉位和負轉位。為了防止如圖 3.5 中所示的下切，我們提出正轉位的例子，並圖示於 3.6 中。與圖 3.6 相反地，圖 3.7 為負轉位的例子。從圖中可以明顯地看出，由於採用負轉位，所以下切現象也變得更加嚴重。圖

3.6 和圖 3.7 所顯示的為轉位齒輪的加工，此時刀具的偏移量 xm 被稱為轉位量，而 x 則被稱為轉位係數。

變位齒輪不產生下切的條件是：

$$m - xm \leq \frac{zm}{2} \sin^2 \alpha \quad (3.11)$$

由此得出下切界限齒數 z 為：

$$z = \frac{2(1-x)}{\sin^2 \alpha} \quad (3.12)$$

同樣亦可得出，轉位係數 x 的值为：

$$x = 1 - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha \quad (3.13)$$

除了防止下切的發生外，中心距離的調整，也經常使用齒輪的轉位。

齒輪在轉位時除了必須討論下切問題外，齒頂的寬度過小也必須加以注意。小齒數齒輪在正轉位過大時，有可能會造成齒頂寬度不足甚至齒頂變尖。

有關正齒輪齒頂寬度 (齒頂厚) 的計算方法列於表 3.2 中。

表 3.2 正齒輪齒頂寬度 (齒頂厚) 計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例
1	齒頂圓壓力角	α_a	$\cos^{-1} \frac{d_b}{d_a}$	$m = 2 \quad \alpha = 20^\circ \quad z = 16$ $x = +0.3 \quad d = 32$ $d_b = 30.07016$ $d_a = 37.2$
2	齒頂圓弧齒厚半角	ψ_a	$\frac{\pi}{2z} + \frac{2x \tan \alpha}{z} + (\text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_a)$ (弧度)	$\alpha_a = 36.06616^\circ$ $\text{inv } \alpha_a = 0.098835$ $\text{inv } \alpha = 0.014904$ $\psi_a = 1.59815^\circ$ (0.027893 弧度)
3	齒頂厚	S_a	$\psi_a \cdot d_a$	$S_a = 1.03762$

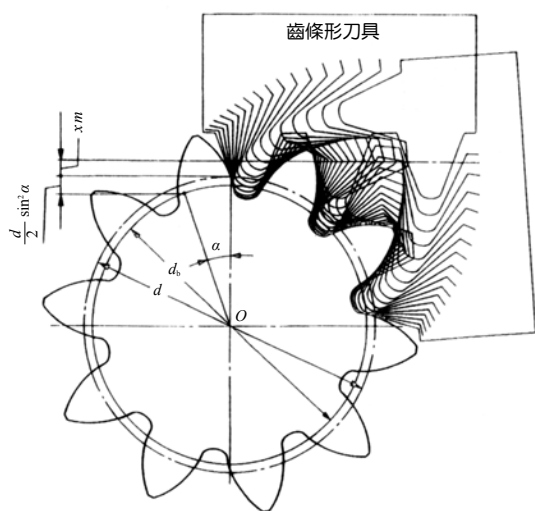


圖 3.6 正轉位正齒輪的創生
($\alpha = 20^\circ, z = 10, x = +0.5$)

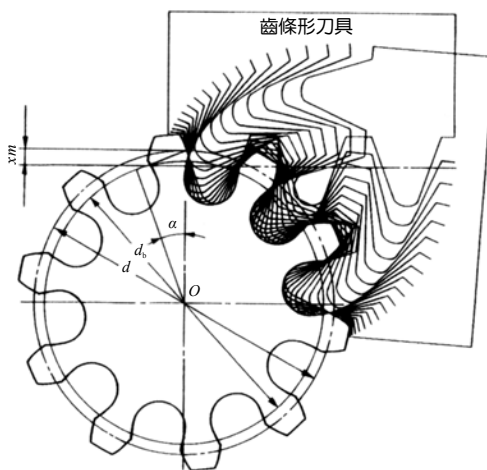


圖 3.7 負轉位正齒輪的創生
($\alpha = 20^\circ, z = 10, x = -0.5$)

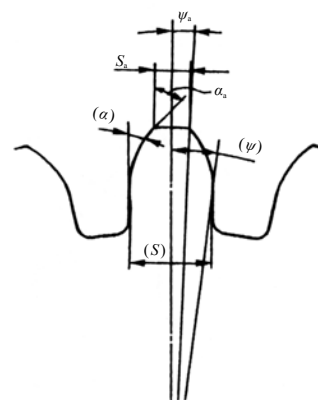


圖 3.8 齒頂厚

4 齒輪尺寸計算

設計齒輪時，儘管順序會有所不同，但所有的設計者必須要做下列工作。

- ◎計算齒輪的強度 —— 決定齒輪的諸元，材料及精度
- ◎計算材料的尺寸 —— 材料，毛胚，車削等必要的尺寸
- ◎計算齒輪的齒厚 —— 對齒輪切削及研磨等必要的尺寸
- ◎計算齒隙
- ◎計算齒輪上的作用力 —— 決定軸及軸承的尺寸時所必要的資料
- ◎探討齒輪的潤滑法及潤滑油

從這裡開始，按不同順序，對設計時所必要的項目詳加說明。

首先是齒輪的尺寸計算。

根據各種齒輪的基本諸元，計算各種齒輪在車削，滾齒等加工時所必要的尺寸。

4.1 正齒輪 (Spur Gears)

(1) 標準正齒輪 (Standard Spur Gears)

圖 4.1 說明標準正齒輪的咬合狀況。

標準正齒輪於標準節圓在相切滾動之狀態下咬合轉動。

表 4.1 為標準正齒輪的計算表。

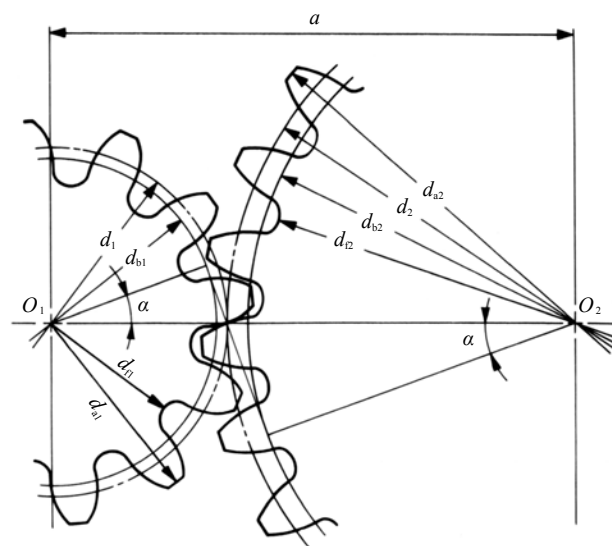


圖 4.1 標準正齒輪的咬合
($\alpha = 20^\circ$, $z_1 = 12$, $z_2 = 24$, $x_1 = x_2 = 0$)

表 4.1 標準正齒輪的計算表

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				小齒輪 (1)	大齒輪 (2)
1	模數	m		3	
2	標準壓力角	α		20°	
3	齒數	z		12	24
4	中心距離	a	$\frac{(z_1 + z_2)m}{2}$ 注1	54.000	
5	標準圓直徑	d	zm	36.000	72.000
6	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha$	33.829	67.658
7	齒冠高	h_a	$1.00m$	3.000	3.000
8	全齒深	h	$2.25m$	6.750	6.750
9	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2m$	42.000	78.000
10	齒底圓直徑	d_f	$d - 2.5m$	28.500	64.500

注1 記號加註下標 1、2，以區別大、小齒輪。

在表 4.1 中，首先便指定出模數 m 及齒數 z_1, z_2 。便指定出 m 中心距離 a 與轉速比 i 為已知條件時，計算出齒數 z_1, z_2 之數據。

表 4.2 齒數的求法

序號	計算項目	記號	計算公式		計算例	
1	模數	m			3	
2	中心距離	a			54.000	
3	轉速比	i			1.25	
4	齒數的和	$z_1 + z_2$	$\frac{2a}{m}$		36	
5	齒數	z	$\frac{z_1 + z_2}{i + 1}$	$\frac{i(z_1 + z_2)}{i + 1}$	16	20

如上例所示，齒數剛好為整數。但是，在實際計算時並非一定如此（齒數之和有可能不為整數）。遇到這種情況時，取最近的整數（或稍加修正）為齒數，再將齒輪予以轉位或者以螺旋齒輪代替正齒輪的話，可得到與所需轉速比相近的解答。

(2) 轉位正齒輪 (Profile Shifted Spur Gears)

圖 4.2 為轉位齒輪的咬合示意圖。

轉位正齒輪的咬合最重要的是咬合標準圓直徑 d' 和壓力角 α' ，也可以說當咬合壓力角不為標準壓力角時，即為轉位齒輪。

這些數值，可根據已知的轉位正齒輪中心距離 a 利用下列公式求出：

$$\left. \begin{aligned} d'_1 &= 2a \frac{z_1}{z_1 + z_2} \\ d'_2 &= 2a \frac{z_2}{z_1 + z_2} \\ \alpha' &= \cos^{-1} \left(\frac{d_{b1} + d_{b2}}{2a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

轉位齒輪可視為這兩個相切咬合圓的滾動，咬合節圓的壓力角即為咬合壓力角。

表 4.3 為已知轉位係數 x_1, x_2 ，求算其他齒輪諸元的計算方法，此算法是以齒頂隙 $c=0.25m$ 為基礎所發展出來的。

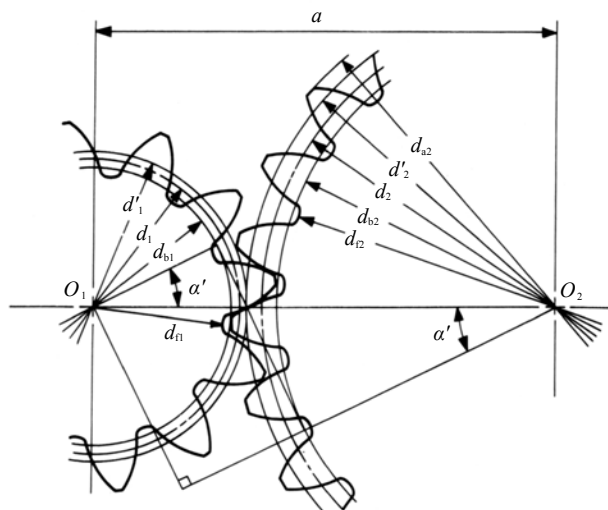


圖 4.2 轉位齒輪的咬合
($\alpha = 20^\circ, z_1 = 12, z_2 = 24, x_1 = +0.6, x_2 = +0.36$)

表 4.3 轉位正齒輪的計算 (1)

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				小齒輪 (1)	大齒輪 (2)
1	模數	m		3	
2	壓力角	α		20°	
3	齒數	z		12	24
4	轉位係數	x		0.6	0.36
5	α' 角的漸開線函數	$\text{inv } \alpha'$	$2 \tan \alpha \left(\frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \right) + \text{inv } \alpha$	0.034316	
6	咬合壓力角	α'	查閱漸開線函數表	26.0886°	
7	中心距離修正係數	y	$\frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1 \right)$	0.83329	
8	中心距離	a	$\left(\frac{z_1 + z_2}{2} + y \right) m$	56.4999	
9	標準圓直徑	d	zm	36.000	72.000
10	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha$	33.8289	67.6579
11	咬合標準圓直徑	d'	$\frac{d_b}{\cos \alpha'}$	37.667	75.333
12	齒冠高	h_{a1} h_{a2}	$(1 + y - x_2) m$ $(1 + y - x_1) m$	4.420	3.700
13	全齒深	h	$\{ 2.25 + y - (x_1 + x_2) \} m$	6.370	
14	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a$	44.840	79.400
15	齒底圓直徑	d_f	$d_a - 2h$	32.100	66.660

轉位齒輪的計算中，將 $x_1 = x_2 = 0$ 時，即為標準齒輪的計算。

若將計算表(1)中的第4到第8項的順序顛倒的話,就變成中心距離為已知條件,倒求轉位係數的方法,如表4.4 轉位齒輪的計算(2).

表 4.4 轉位齒輪的計算(2)

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
1	中心距離	a		56.4999	
2	中心距離修正係數	y	$\frac{a}{m} - \frac{z_1 + z_2}{2}$	0.8333	
3	咬合壓力角	α'	$\cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\frac{2y}{z_1 + z_2} + 1} \right)$	26.0886°	
4	轉位係數和	$x_1 + x_2$	$\frac{(z_1 + z_2)(\operatorname{inv} \alpha' - \operatorname{inv} \alpha)}{2 \tan \alpha}$	0.9600	
5	轉位係數	x		0.6000	0.3600

至於如何將轉位係數和 $x_1 + x_2$ 分配到每個齒輪上,有著各式各樣的方法.其中比較著名的有 BSS (英國國家規格), DIN (德國國家規格) 等.在這裡,我們將省略對此問題的說明.

在上述轉位正齒輪的計算例中,是在既為防止下切,又不使齒頂變尖的情況下,為小齒輪 ($z_1 = 12$) 選擇轉位係數.

(3) 齒條和正齒輪 (Racks & Pinions)

在這裏,我們將介紹齒條與正齒輪的咬合及計算方法。

在圖 4.3(1)中,我們舉出了標準正齒輪與齒條的咬合狀況。在這個咬合中,標準正齒輪的標準節圓與齒條的節線相切。

圖 4.3(2)則表示轉位正齒輪和齒條的咬合狀態。轉

位正齒輪的標準節圓和齒條的節線不相切,在離開轉位量的位置咬合(註:齒條的壓力角即為標準壓力角,既然標準壓力角在一特定系統中不會改變,也就沒有所謂的轉位齒條了。因此無論小齒輪如何轉位,其與齒條的咬合壓力角仍舊為標準壓力角不會改變)。

表 4.5 中,示意了齒條和轉位正齒輪咬合的計算方法。當表中的轉位係數 $x_1 = 0$ 時,可以做為無轉位標準正齒輪的計算公式加以使用。

表 4.5 齒條與變位正齒輪的啮合計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				正齒輪	齒條
1	模數	m		3	
2	壓力角	α		20°	
3	齒數	z		12	—
4	轉位係數	x		0.6	
5	節線高度	H		—	32.000
6	咬合壓力角	α'		20°	
7	裝配距離	a	$\frac{zm}{2} + H + xm$	51.800	
8	標準圓直徑	d	zm	36.000	—
9	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha$	33.829	
10	啮合標準圓直徑	d'	$\frac{d_b}{\cos \alpha'}$	36.000	
11	齒冠高	h_a	$m(1+x)$	4.800	3.000
12	全齒深	h	$2.25m$	6.750	
13	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a$	45.600	—
14	齒底圓直徑	d_f	$d_a - 2h$	32.100	

齒條與正齒輪咬合時,正齒輪回轉一周的齒條移動量 l 為標準節距的齒數倍。

$$l = \pi m z \quad (4.2)$$

齒條的移動量 l 不受齒輪轉位的影響,也是由齒條的標準節距 πm 和正齒輪的齒數 z 來決定。

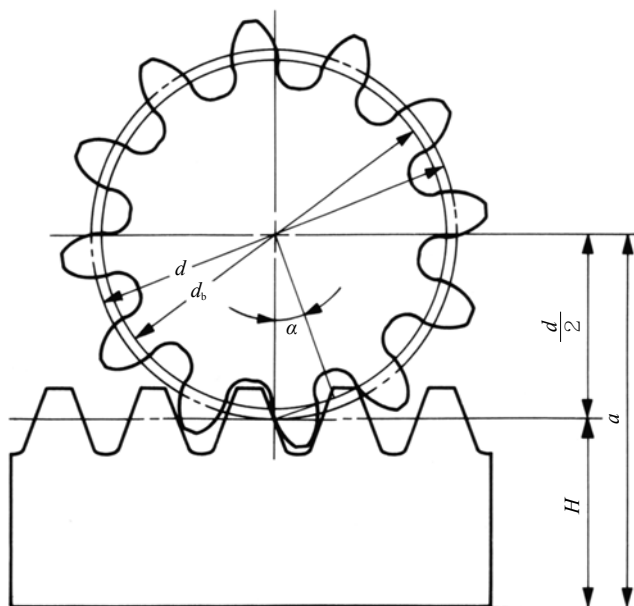


圖 4.3 (1) 標準正齒輪與齒條的咬合
($\alpha = 20^\circ, z_1 = 12, x_1 = 0$)

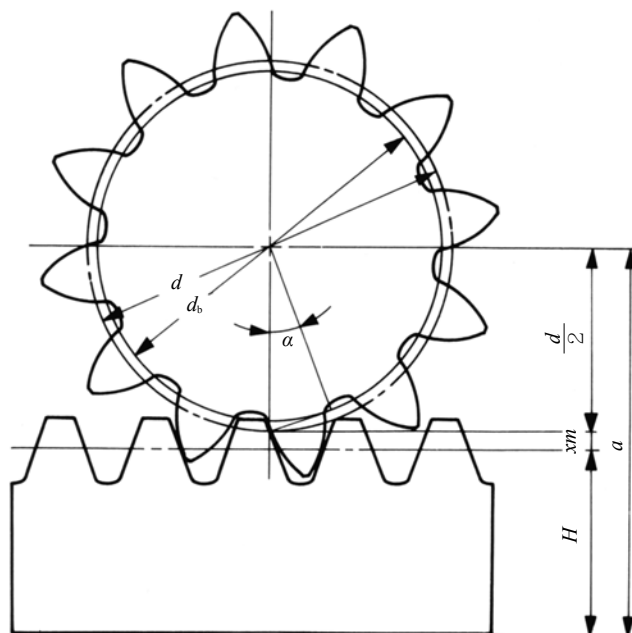


圖 4.3 (2) 轉位正齒輪與齒條的咬合
($\alpha = 20^\circ, z_1 = 12, x_1 = +0.6$)

4.2 內齒輪 (Internal Gear)

(1) 轉位內齒輪的計算

內齒輪與正齒輪的咬合狀況如圖 4.4 所示。

內齒輪和外齒輪咬合時，最重要的是要掌握咬合標準圓直徑 d' 和咬合壓力角 α' 。

具體的數據可以根據轉位齒輪的中心距離 a 簡單地利用下式求出。

$$\left. \begin{aligned} d'_1 &= 2a \frac{z_1}{z_2 - z_1} \\ d'_2 &= 2a \frac{z_2}{z_2 - z_1} \\ \alpha' &= \cos^{-1} \left(\frac{d_{b2} - d_{b1}}{2a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

表 4.6 中，列出了變位內齒輪與正齒輪的計算方法。

計算標準齒輪時，我們只要將式中的 $x_1 = x_2 = 0$ 來計算即可。

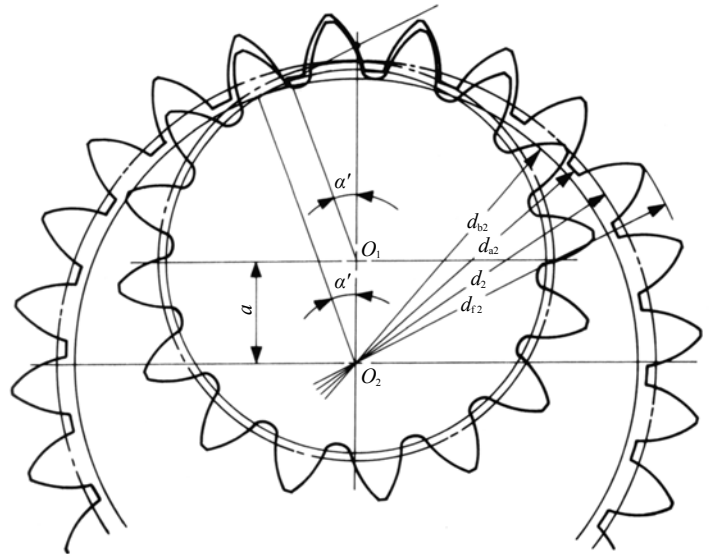


圖 4.4 內齒輪與正齒輪的咬合
($\alpha = 20^\circ, z_1 = 16, z_2 = 24, x_1 = x_2 = +0.5$)

表 4.6 轉位內齒輪和正齒輪的計算 (1)

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				正齒輪 (1)	內齒輪 (2)
1	模數	m		3	
2	壓力角	α		20°	
3	齒數	z		16	24
4	轉位係數	x		0	+0.5
5	漸開線函數	$\text{inv } \alpha'$	$2 \tan \alpha \left(\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \right) + \text{inv } \alpha$	0.060401	
6	咬合壓力角	α'	查閱漸開線函數表	31.0937°	
7	中心距離修正係數	y	$\frac{z_2 - z_1}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1 \right)$	0.389426	
8	中心距離	a	$\left(\frac{z_2 - z_1}{2} + y \right) m$	13.1683	
9	標準圓直徑	d	zm	48.000	72.000
10	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha$	45.105	67.658
11	咬合部節徑	d'	$\frac{d_b}{\cos \alpha'}$	52.673	79.010
12	齒冠高	h_{a1} h_{a2}	$(1 + x_1) m$ $(1 - x_2) m$	3.000	1.500
13	全齒深	h	$2.25m$	6.75	
14	齒頂圓直徑	d_{a1} d_{a2}	$d_1 + 2h_{a1}$ $d_2 - 2h_{a2}$	54.000	69.000
15	齒底圓直徑	d_{f1} d_{f2}	$d_{a1} - 2h$ $d_{a2} + 2h$	40.500	82.500

若是在中心距離 a 為已知條件下, 欲求得轉位係數 x_1, x_2 時, 則必須將表 4.6 中第 4 項到第 8 項的順序顛倒過來計算, 如表 4.7.

表 4.7 轉位內齒輪和正齒輪的計算 (2)

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例
1	中心距離	a		13.1683
2	中心距離修正係數	y	$\frac{a}{m} - \frac{z_2 - z_1}{2}$	0.38943
3	咬合壓力角	α'	$\cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\frac{2y}{z_2 - z_1} + 1} \right)$	31.0937°
4	轉位係數的差	$x_2 - x_1$	$\frac{(z_2 - z_1)(\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha)}{2 \tan \alpha}$	0.5
5	轉位係數	x		0 0.5

內齒輪或正齒輪在使用小齒輪形切齒刀切齒時, 加工齒輪的齒深及齒底圓直徑可能與根據上式所算得的資料不同. 這是因為齒數及小齒輪形切齒刀轉位係數的影響. 要想得到正確的尺寸, 需要根據小齒輪形切齒刀的轉位係數嚴密計算.

(2) 內齒輪的干涉

內齒輪與外齒輪在嚙合時, 會發生如下具有代表性的三種干涉.

1. 漸開線干涉 (involute interference)
2. 滾跡線干涉 (trochoid interference)
3. 脫離干涉 (trimming interference)

(a) 漸開線干涉

漸開線干涉是正齒輪的齒根與內齒輪的齒冠間的干涉, 容易發生在正齒輪的齒數較少時.

避免漸開線干涉發生的條件是:

$$\frac{z_1}{z_2} \geq 1 - \frac{\tan \alpha_{a2}}{\tan \alpha'} \quad (4.4)$$

其中 α_{a2} : 是內齒輪的齒頂壓力角

$$\alpha_{a2} = \cos^{-1} \left(\frac{d_{b2}}{d_{a2}} \right) \quad (4.5)$$

α' : 是咬合壓力角

$$\alpha' = \cos^{-1} \left\{ \frac{(z_2 - z_1) m \cos \alpha}{2a} \right\} \quad (4.6)$$

想要使 (4.5) 公式成立, 則內齒輪的齒頂圓比基圓大是其必要條件.

$$d_{a2} \geq d_{b2} \quad (4.7)$$

節圓壓力角 $\alpha = 20^\circ$ 的標準內齒輪, 如果齒數不能滿足條件 $z_2 > 34$ 的話, 則內齒輪的齒頂圓無法大於基圓.

(b) 滾跡線干涉

滾跡線干涉是正齒輪的齒冠在脫離內齒輪齒溝時, 與內齒輪的齒冠間產生之干涉, 容易發生在內齒輪與正齒輪的齒數差較小時.

不產生滾跡線干涉的條件是:

$$\theta_1 \frac{z_1}{z_2} + \text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha_{a2} \geq \theta_2 \quad (4.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \cos^{-1} \left(\frac{r_{a2}^2 - r_{a1}^2 - a^2}{2ar_{a1}} \right) \\ &\quad + \text{inv } \alpha_{a1} - \text{inv } \alpha' \\ \theta_2 &= \cos^{-1} \left(\frac{a^2 + r_{a2}^2 - r_{a1}^2}{2ar_{a2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

其中 α_{a1} 是正齒輪的齒頂壓力角

$$\alpha_{a1} = \cos^{-1} \left(\frac{d_{b1}}{d_{a1}} \right) \quad (4.10)$$

$$\alpha_{a2} = \cos^{-1} \left(\frac{d_{b2}}{d_{a2}} \right)$$

經由計算可以得出, 節圓壓力角 $\alpha = 20^\circ$ 的標準內齒輪與標準正齒輪嚙合時齒數差 $z_2 - z_1$ 只要大於 9, 就不會發生滾跡線干涉.

(c) 脫離干涉

脫離干涉是指正常咬合的內齒輪與正齒輪間，正齒輪無法從咬合狀態沿半徑方向脫離退出，這種干涉也是容易發生在內齒輪與正齒輪的齒數差較小時。

不發生此干涉的條件如式(4.11)所示：

$$\theta_1 + \text{inv } \alpha_{a1} - \text{inv } \alpha' \geq \frac{z_2}{z_1} (\theta_2 + \text{inv } \alpha_{a2} - \text{inv } \alpha') \quad (4.11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 - (\cos \alpha_{a1} / \cos \alpha_{a2})^2}{1 - (z_1/z_2)^2}} \\ \theta_2 &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\cos \alpha_{a2} / \cos \alpha_{a1})^2 - 1}{(z_2/z_1)^2 - 1}} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

即使發生脫離干涉，只要將齒輪沿軸方向移動仍然可以裝卸齒輪，且完全不會影響齒輪咬合後的運轉。

但是，當使用小齒輪形切齒刀創生內齒輪時，這種干涉就成了重大的問題了。也就是說，在有脫離干涉的情形下，小齒輪形切齒刀從內齒輪退刀脫出時，由於干涉的影響，刀具有發生破損的可能。

刀具壓力角 $\alpha_0 = 20^\circ$ 的標準內齒輪，利用無轉位的 ($x_0 = 0$) 小齒輪形切齒刀切齒時，不發生脫離干涉的內齒輪齒數界限(下限)列於表 4.8(1)。

表 4.8(1) 不發生脫離干涉的內齒輪齒數界限 $\alpha_0 = 20^\circ, x_0 = x_2 = 0$

z_0	15	16	17	18	19	20	21	22	24	25	27
z_2	34	34	35	36	37	38	39	40	42	43	45
z_0	28	30	31	32	33	34	35	38	40	42	
z_2	46	48	49	50	51	52	53	56	58	60	
z_0	44	48	50	56	60	64	66	80	96	100	
z_2	62	66	68	74	78	82	84	98	114	118	

此表中， $z_0 = 15 \sim 22$ 時，將發生漸開線干涉 (z_0 為小齒輪形切齒刀的齒數)。

表 4.8(2) 列出了利用轉位小齒輪形切齒刀切削標準內齒輪時，不發生脫離干涉的內齒輪最少齒數。

此時，設 $x_0 = 0.0075z_0 + 0.05$ 。

表 4.8(2) 不發生脫離干涉的內齒輪齒數界限 $\alpha_0 = 20^\circ, x_2 = 0$

z_0	15	16	17	18	19	20	21	22	24	25	27
x_0	0.1625	0.17	0.1775	0.185	0.1925	0.2	0.2075	0.215	0.23	0.2375	0.2525
z_2	36	38	39	40	41	42	43	45	47	48	50
z_0	28	30	31	32	33	34	35	38	40	42	
x_0	0.26	0.275	0.2825	0.29	0.2975	0.305	0.3125	0.335	0.35	0.365	
z_2	52	54	55	56	58	59	60	64	66	68	
z_0	44	48	50	56	60	64	66	80	96	100	
x_0	0.38	0.41	0.425	0.47	0.5	0.53	0.545	0.65	0.77	0.8	
z_2	71	76	78	86	90	95	98	115	136	141	

此表中，當 $z_0 = 15 \sim 19$ 時，將發生漸開線干涉，內齒輪齒冠的部分正確的漸開線齒形將因為與刀具發生干涉而被切掉。

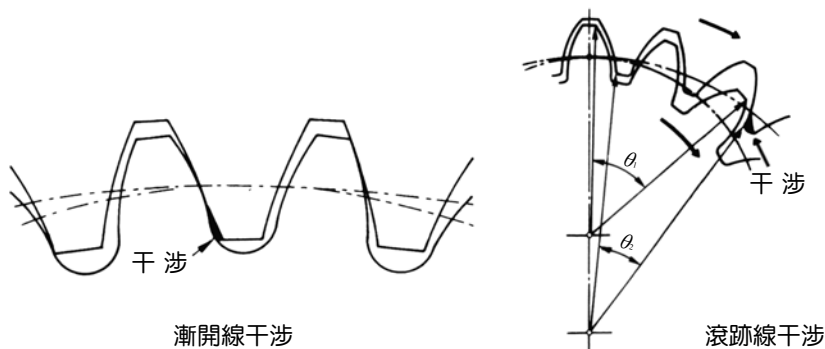


圖 4.5 漸開線干涉和滾跡線干涉

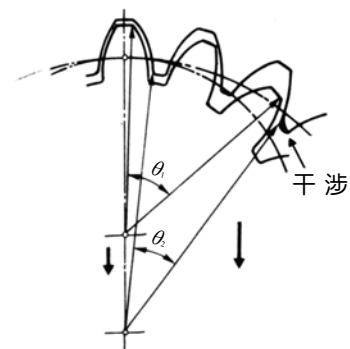


圖 4.6 脫離干涉

4.3 螺旋齒輪 (Helical Gear)

如圖 4.7 所示，螺旋齒輪是齒筋呈螺旋線狀的圓筒齒輪。在節圓上，螺旋線之螺旋角為 β ，回轉一周的導程為 p_z 。

螺旋齒輪的齒形曲線，從軸直角斷面看為漸開線曲線，齒形有齒直角方式與軸直角方式二種。

螺旋線在齒直角方向上所測定的節距為 p_n （齒直角節距），將之除以 π 所得的數值為齒直角模數 m_n 。

$$m_n = \frac{p_n}{\pi} \quad (4.13)$$

以齒直角模數 m_n 和齒直角壓力角 α_n 為標準的齒輪，稱為齒直角方式螺旋齒輪。

把在軸和節面垂直平面上，其上的節圓所測出的節距 p_t （軸直角節距）除以圓周率 π 所得出的數值稱為軸直角模數 m_t 。

$$m_t = \frac{p_t}{\pi} \quad (4.14)$$

以軸直角模數 m_t 和齒直角壓力角 α_t 為標準的齒輪，稱為軸直角方式螺旋齒輪。

齒直角方式的螺旋齒輪只要齒直角模數 m_n 和齒直角壓力角 α_n 相同，即使是標準圓螺旋角 β 即不同，也可以利用相同的滾齒刀切齒加工。

但是，軸直角方式的螺旋齒輪就不一樣了，雖然是軸直角模數 m_t 和軸直角壓力角 α_t 相同，如果標準圓筒螺旋角 β 不同的話，切齒時就不能使用相同的滾齒刀具。

由於齒直角方式螺旋齒輪比較容易製造，因此被廣泛採用。

在平行軸使用螺旋齒輪咬合時，必須使用螺旋角大小相等，旋向相反的齒輪組。

螺旋角大小不同或旋向相同的螺旋齒輪，是不能使用在平行軸上咬合轉動的，只能在兩軸交錯的情形下咬合，此時便稱之為交錯軸螺旋齒輪了。

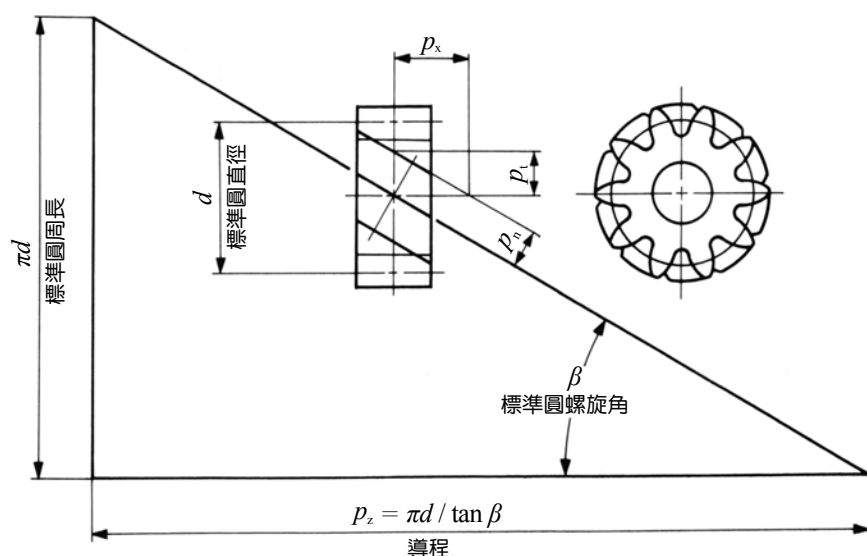


圖 4.7 螺旋齒輪（右旋齒）

(1) 齒直角方式螺旋齒輪

對於轉位螺旋齒輪的咬合而言，咬合圓直徑 d' 和軸直角咬合壓力角 α'_t 是重要的因素。

從軸直角來考慮的話，正齒輪和螺旋齒輪的咬合情形是相同的，所以計算公式也相同。

$$\left. \begin{aligned} d'_1 &= 2a \frac{z_1}{z_1 + z_2} \\ d'_2 &= 2a \frac{z_2}{z_1 + z_2} \\ \alpha'_t &= \cos^{-1} \left(\frac{d_{b1} + d_{b2}}{2a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

表 4.9 是齒直角方式轉位螺旋齒輪的計算表。計算標準螺旋齒輪時，式中的 $x_{n1} = x_{n2} = 0$ 。

表 4.9 齒直角方式轉位螺旋齒輪的計算 (1)

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				小齒輪 (1)	大齒輪 (2)
1	齒直角模數	m_n		3	
2	齒直角壓力角	α_n		20°	
3	標準圓筒螺旋角	β		30°	
4	齒數 (螺旋方向)	z		12 (L)	60 (R)
5	軸直角壓力角	α_t	$\tan^{-1} \left(\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \right)$	22.79588°	
6	齒直角轉位係數	x_n		+ 0.09809	0
7	α'_t 的漸開線函數	$\text{inv } \alpha'_t$	$2 \tan \alpha_n \left(\frac{x_{n1} + x_{n2}}{z_1 + z_2} \right) + \text{inv } \alpha_t$	0.023405	
8	軸直角咬合壓力角	α'_t	查閱漸開線函數表	23.1126°	
9	中心距離修正係數	y	$\frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta} \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha'_t} - 1 \right)$	0.09744	
10	中心距離	a	$\left(\frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta} + y \right) m_n$	125.000	
11	標準圓直徑	d	$\frac{z m_n}{\cos \beta}$	41.569	207.846
12	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha_t$	38.322	191.611
13	咬合標準圓直徑	d'	$\frac{d_b}{\cos \alpha'_t}$	41.667	208.333
14	齒冠高	h_{a1} h_{a2}	$(1 + y - x_{n2}) m_n$ $(1 + y - x_{n1}) m_n$	3.292	2.998
15	全齒深	h	$\{ 2.25 + y - (x_{n1} + x_{n2}) \} m_n$	6.748	
16	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a$	48.153	213.842
17	齒底圓直徑	d_f	$d_a - 2h$	34.657	200.346

當齒輪的中心距離 a 為已知的條件下，欲求得轉位係數 x_{n1} ， x_{n2} 時，需將表 4.9 中的第 4 項到第 10 項按相反的順序計算即可。

計算結果列於表 4.10。

表 4.10 齒直角方式轉位螺旋齒輪的計算 (2)

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
1	中心距離	a		125	
2	中心距離修正係數	y	$\frac{a}{m_n} - \frac{z_1 + z_2}{2\cos\beta}$	0.097447	
3	軸直角咬合壓力角	α'_t	$\cos^{-1}\left(\frac{\cos\alpha_t}{\frac{2y\cos\beta}{z_1+z_2} + 1}\right)$	23.1126°	
4	轉位係數和	$x_{n1} + x_{n2}$	$\frac{(z_1 + z_2)(\text{inv}\alpha'_t - \text{inv}\alpha_t)}{2\tan\alpha_n}$	0.09809	
5	齒直角轉位係數	x_n		0.09809	0

齒直角方式螺旋齒輪與軸直角方式螺旋齒輪的關係

如下：

$$\left. \begin{aligned} x_t &= x_n \cos\beta \\ m_t &= \frac{m_n}{\cos\beta} \\ \alpha_t &= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\alpha_n}{\cos\beta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

(2) 軸直角方式螺旋齒輪

表 4.11 是軸直角方式變位斜齒齒輪的計算表。計算標準斜齒齒輪時，取 $x_{t1} = x_{t2} = 0$ 。

表 4.11 軸直角方式轉位螺旋齒輪的計算 (1)

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				小齒輪 (1)	大齒輪 (2)
1	軸直角模數	m_t		3	
2	軸直角壓力角	α_t		20°	
3	標準圓筒螺旋角	β		30°	
4	齒數 (螺旋方向)	z		12 (L)	60 (R)
5	軸直角轉位係數	x_t		0.34462	0
6	α'_t 的漸開線函數	$\text{inv } \alpha'_t$	$2 \tan \alpha_t \left(\frac{x_{t1} + x_{t2}}{z_1 + z_2} \right) + \text{inv } \alpha_t$	0.0183886	
7	軸直角咬合壓力角	α'_t	查閱漸開線函數表	21.3975°	
8	中心距離修正係數	y	$\frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha'_t} - 1 \right)$	0.33333	
9	中心距離	a	$\left(\frac{z_1 + z_2}{2} + y \right) m_t$	109.0000	
10	標準圓直徑	d	$z m_t$	36.000	180.000
11	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha_t$	33.8289	169.1447
12	咬合圓直徑	d'	$\frac{d_b}{\cos \alpha'_t}$	36.3333	181.6667
13	齒冠高	h_{a1} h_{a2}	$(1 + y - x_{t2}) m_t$ $(1 + y - x_{t1}) m_t$	4.000	2.966
14	全齒深	h	$\{ 2.25 + y - (x_{t1} + x_{t2}) \} m_t$	6.716	
15	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a$	44.000	185.932
16	齒底圓直徑	d_f	$d_a - 2h$	30.568	172.500

將表 4.11 中的第 5 項到第 9 項按相反的順序計算時，可由中心距離反求轉位係數如表 (2)。

表 4.12 軸直角方式轉位齒輪的計算 (2)

序號	計算項目	代號	計算方程式	計算例	
1	中心距離	a		109	
2	中心距離修正係數	y	$\frac{a}{m_t} - \frac{z_1 + z_2}{2}$	0.33333	
3	軸直角咬合壓力角	α'_t	$\cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha_t}{\frac{2y}{z_1 + z_2} + 1} \right)$	21.3975°	
4	轉位係數和	$x_{t1} + x_{t2}$	$\frac{(z_1 + z_2)(\text{inv } \alpha'_t - \text{inv } \alpha_t)}{2 \tan \alpha_t}$	0.34462	
5	軸直角轉位係數	x_t		0.34462	0

軸直角方式螺旋齒輪與齒直角方式螺旋齒輪的關係如下：

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \frac{x_t}{\cos \beta} \\ m_n &= m_t \cos \beta \\ \alpha_n &= \tan^{-1}(\tan \alpha_t \cos \beta) \end{aligned} \right\} (4.17)$$

(3) Sunderland 齒形 (人字齒輪)

Sunderland 齒形採用軸直角方式,是具有代表性的螺旋齒輪。

這種齒形的軸直角壓力角 $\alpha_t = 20^\circ$, 標準圓筒螺旋角 $\beta = 22.5^\circ$ 。

人字齒輪與軸直角方式轉位螺旋齒輪在計算上只有齒冠高和全齒深的計算公式不同。

Sunderland 齒形人字齒輪的計算列於表 4.13。

表 4.13 Sunderland 齒形人字齒輪的計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				小齒輪 (1)	大齒輪 (2)
1	軸直角模數	m_t		3	
2	軸直角壓力角	α_t		20°	
3	標準圓筒螺旋角	β		22.5°	
4	齒數	z		12	60
5	軸直角轉位係數	x_t		0.34462	0
6	α'_t 的漸開線函數	$\text{inv } \alpha'_t$	$2 \tan \alpha_t \left(\frac{x_{t1} + x_{t2}}{z_1 + z_2} \right) + \text{inv } \alpha_t$	0.0183886	
7	軸直角咬合壓力角	α'_t	查閱漸開線函數表	21.3975°	
8	中心距離修正係數	y	$\frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha'_t} - 1 \right)$	0.33333	
9	中心距離	a	$\left(\frac{z_1 + z_2}{2} + y \right) m_t$	109.0000	
10	標準圓直徑	d	$z m_t$	36.000	180.000
11	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha_t$	33.8289	169.1447
12	咬合圓直徑	d'	$\frac{d_b}{\cos \alpha'_t}$	36.3333	181.6667
13	齒冠高	h_{a1} h_{a2}	$(0.8796 + y - x_{t2}) m_t$ $(0.8796 + y - x_{t1}) m_t$	3.639	2.605
14	全齒深	h	$\{ 1.8849 + y - (x_{t1} + x_{t2}) \} m_t$	5.621	
15	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a$	43.278	185.210
16	齒底圓直徑	d_f	$d_a - 2h$	32.036	173.968

(4) 螺旋齒條 (Helical Rack)

螺旋輪與螺旋條的咬合從軸直角看上去，與齒條和正齒輪的咬合完全相同。

表 4.14 為齒直角方式螺旋條的計算，表 4.15 為軸直角方式螺旋條的計算。

表 4.14 齒直角方式螺旋齒條的計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				螺旋齒輪	螺旋齒條
1	齒直角模數	m_n		2.5	
2	齒直角壓力角	α_n		20°	
3	節圓筒螺旋角	β		10°57'49"	
4	齒數 (螺旋方向)	z		20 (R)	— (L)
5	齒直角轉位係數	x_n		0	—
6	節線高度	H		—	27.5
7	軸直角壓力角	α_t	$\tan^{-1}\left(\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}\right)$	20.34160°	
8	裝配距離	a	$\frac{zm_n}{2\cos \beta} + H + x_n m_n$	52.965	
9	標準圓直徑	d	$\frac{zm_n}{\cos \beta}$	50.92956	—
10	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha_t$	47.75343	
11	齒冠高	h_a	$m_n (1 + x_n)$	2.500	2.500
12	全齒深	h	$2.25m_n$	5.625	
13	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a$	55.929	—
14	齒底圓直徑	d_f	$d_a - 2h$	44.679	

表中 $x_n = 0$ 時，即為無轉位齒直角齒輪的計算。

齒直角方式螺旋齒條與螺旋齒輪在平行軸相互咬合時，螺旋角相等，旋向相反是必要條件。

螺旋齒輪回轉一周時齒條的位移量為齒條軸直角節距的齒數倍。

$$l = \frac{\pi m_n}{\cos \beta} z \quad (4.18)$$

在表 4.14 的情況下，軸直角節距 p_t 為 8mm，所以位移 l 為 160 mm。

如上所述，只要適當地選擇螺旋角，軸直角節距 p_t 可以成為整數。

表 4.15 軸直角方式螺旋齒條的計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				螺旋齒輪	螺旋齒條
1	軸直角模數	m_t		2.5	
2	軸直角壓力角	α_t		20°	
3	螺旋角	β		10°57'49"	
4	齒數(螺旋方向)	z		20 (R)	— (L)
5	軸直角轉位係數	x_t		0	—
6	節線高度	H		—	27.5
7	裝配距離	a	$\frac{zm_t}{2} + H + x_t m_t$	52.500	
8	標準圓直徑	d	zm_t	50.000	—
9	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha_t$	46.98463	
10	齒冠高	h_a	$m_t (1 + x_t)$	2.500	2.500
11	全齒深	h	$2.25m_t$	5.625	
12	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a$	55.000	—
13	齒底圓直徑	d_f	$d_a - 2h$	43.750	

軸直角方式螺旋齒條和螺旋輪嚙合時，螺旋輪旋轉一週時齒條的位移量 l 是齒條的軸直角節距的齒數倍。

$$l = \pi m_t z \quad (4.19)$$

4.4 傘形齒輪 (Bevel Gear)

傘形齒輪是在相交的兩軸之間做傳動的圓錐形齒輪。根據齒筋的形狀，分為直齒傘形齒輪，彎齒傘形齒輪，零度齒傘形齒輪。

傘形齒輪是擁有圓錐形節圓的兩個齒輪，咬合轉動時於相切的兩個節錐上做純滾動接觸的齒輪。

齒數為 z_1 的小齒輪和齒數為 z_2 的大齒輪在軸角為 Σ (相交兩軸間的夾角) 咬合時，各節圓錐角為 δ_1 、 δ_2 。計算方法如下所示。

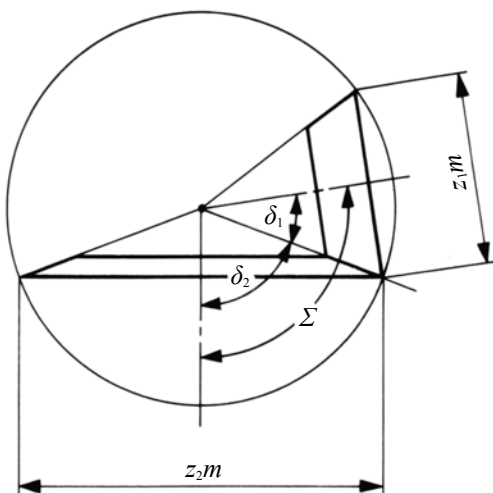


圖 4.8 傘形齒輪的節圓圓錐角

$$\left. \begin{aligned} \tan \delta_1 &= \frac{\sin \Sigma}{\frac{z_2}{z_1} + \cos \Sigma} \\ \tan \delta_2 &= \frac{\sin \Sigma}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

軸角 Σ 為直角的情形最為常見。除直角外，也可在銳角及鈍角的狀態下使用。在銳角及鈍角的狀態下使用的傘形齒輪被稱為斜交傘形齒輪。圖 4.8 為軸角為鈍角的斜交傘形齒輪。

軸角 $\Sigma = 90^\circ$ 時，公式 (4.20) 變化如下：

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \\ \delta_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

軸角 $\Sigma = 90^\circ$ ，轉速比 $z_2/z_1 = 1$ 的傘形齒輪被稱為等徑傘形齒輪。

傘形齒輪的咬合必須以一對的齒輪情況來考慮。確認之外的齒數組合無法正確咬合。

傘形齒輪的咬合，若如圖 4.9 所示，由大端之軸直角方向為標準來看，可以得到類似於以背錐距離為中心距離的咬合正齒輪對，此正齒輪稱為等價正齒輪。

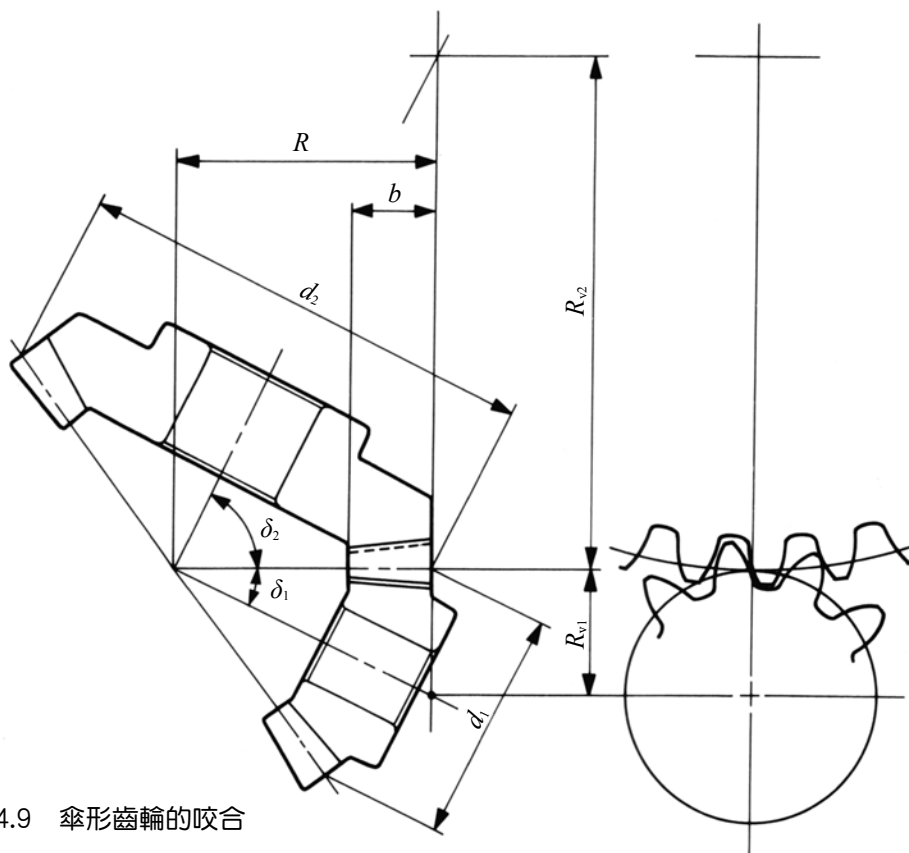


圖 4.9 傘形齒輪的咬合

(1) Gleason 直齒傘形齒輪

直齒傘形齒輪是齒筋為沿圓錐面指向圓錐頂點的直線傘形齒輪。

直齒傘形齒輪有 Gleason 直齒傘形齒輪和標準直齒傘形齒輪兩種。

這裡介紹的 Gleason 直齒傘形齒輪，其齒形為齒深 $h = 2.188m$ ，頂隙 $c = 0.188m$ ，有效齒深 $h' = 2.000m$ 。

這種齒輪的特點是：

○是一種轉位齒輪

為使大小齒輪的強度得以均衡，對小齒輪予以正轉位，對大齒輪予以負轉位，但是在大小齒輪齒數相等的等比傘形齒輪上，則不予轉位處理。

○有平行的齒頂隙

齒頂圓錐母線和相咬合齒輪的齒底圓錐母線平行。

軸角 $\Sigma = 90^\circ$ 的 Gleason 直齒傘形齒輪，為防止產生下切的最小齒數列於表 4.16。

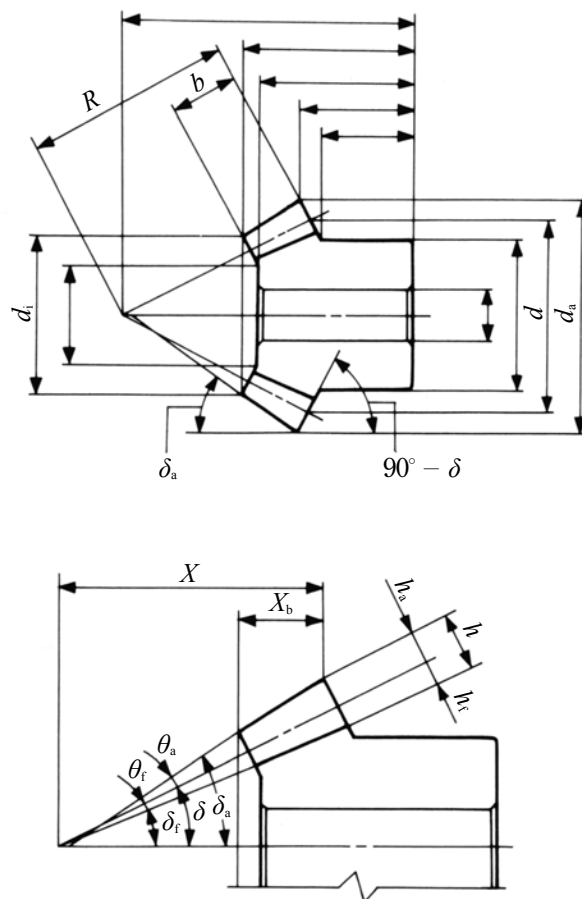


圖 4.10 傘形齒輪的尺寸及角度

表 4.16 防止下切的最小齒數

標準壓力角	齒數的組合 (z_1 / z_2)					
(14.5°)	29/29 以上	28/29 以上	27/31 以上	26/35 以上	25/40 以上	24/57 以上
20°	16/16 以上	15/17 以上	14/20 以上	13/30 以上		
(25°)	13/13 以上					

表 4.17 是 Gleason 直齒傘形齒輪的尺寸計算表。所計算出的尺寸及角度如圖 4.10 所示。

表 4.17 也可計算斜交直齒傘形齒輪。

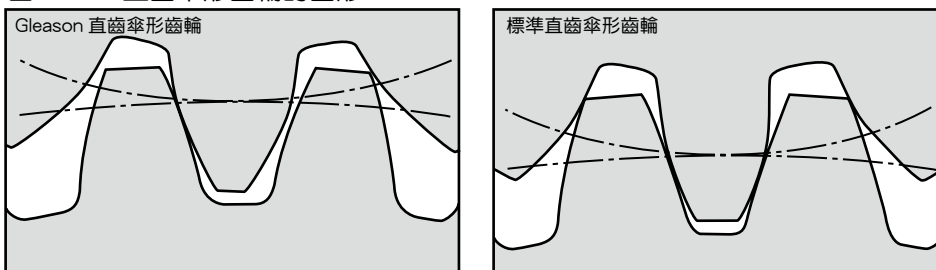
Gleason 公司，將經過削鼓形加工的直齒傘形齒輪稱為 coniflex gear。經過此加工的 coniflex 齒輪對防止因裝配誤差而引起的單側齒承非常有效。

表 4.17 Gleason 直齒傘形齒輪的計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				小齒輪(1)	大齒輪(2)
1	軸角	Σ		90°	
2	模數(大端)	m		3	
3	標準壓力角	α		20°	
4	齒數	z		20	40
5	標準圓直徑	d	zm	60	120
6	標準圓錐角	δ_1 δ_2	$\tan^{-1}\left(\frac{\sin \Sigma}{\frac{z_2}{z_1} + \cos \Sigma}\right)$ $\Sigma - \delta_1$	26.56505°	63.43495°
7	圓錐距離	R	$\frac{d_2}{2 \sin \delta_2}$	67.08204	
8	齒幅	b	最好能控制在 $R/3$ 或者 $10m$ 之內	22	
9	齒冠高	h_{a1} h_{a2}	$2.000m - h_{a2}$ $0.540m + \left(\frac{0.460m}{\frac{z_2 \cos \delta_1}{z_1 \cos \delta_2}}\right)$	4.035	1.965
10	齒根高	h_f	$2.188m - h_a$	2.529	4.599
11	齒根角	θ_f	$\tan^{-1}(h_f / R)$	2.15903°	3.92194°
12	齒頂角	θ_{a1} θ_{a2}	θ_{f2} θ_{f1}	3.92194°	2.15903°
13	齒頂圓錐角	δ_a	$\delta + \theta_a$	30.48699°	65.59398°
14	齒底圓錐角	δ_f	$\delta - \theta_f$	24.40602°	59.51301°
15	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a \cos \delta$	67.2180	121.7575
16	冠頂距離	X	$R \cos \delta - h_a \sin \delta$	58.1955	28.2425
17	齒頂間軸向距離	X_b	$\frac{b \cos \delta_a}{\cos \theta_a}$	19.0029	9.0969
18	小端齒頂圓直徑	d_i	$d_a - \frac{2b \sin \delta_a}{\cos \theta_a}$	44.8425	81.6609

Gleason 直齒傘形齒輪的特點是轉位。表 4.17 的格裡森直齒傘形齒輪的齒形和表 4.18 的標準直齒傘形齒輪的齒形示意於圖 4.11。

圖 4.11 直齒傘形齒輪的齒形



(2) 標準直齒傘形齒輪

標準直齒傘形齒輪的齒形為全齒深且沒有轉位的齒形。計算方法如表 4.18 所示。

表 4.18 標準直齒傘形齒輪的計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				小齒輪 (1)	大齒輪 (2)
1	軸角	Σ		90°	
2	模數 (大端)	m		3	
3	標準壓力角	α		20°	
4	齒數	z		20	40
5	標準圓直徑	d	zm	60	120
6	標準圓錐角	δ_1	$\tan^{-1} \left(\frac{\sin \Sigma}{\frac{z_2}{z_1} + \cos \Sigma} \right)$	26.56505°	63.43495°
		δ_2	$\Sigma - \delta_1$		
7	圓錐距離	R	$\frac{d_2}{2 \sin \delta_2}$	67.08204	
8	齒幅	b	最好能控制在 $R/3$ 或者 $10m$ 之內	22	
9	齒冠高	h_a	$1.00m$	3.00	
10	齒根高	h_f	$1.25m$	3.75	
11	齒根角	θ_f	$\tan^{-1} (h_f / R)$	3.19960°	
12	齒頂角	θ_a	$\tan^{-1} (h_a / R)$	2.56064°	
13	齒頂圓錐角	δ_a	$\delta + \theta_a$	29.12569°	65.99559°
14	齒底圓錐角	δ_f	$\delta - \theta_f$	23.36545°	60.23535°
15	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a \cos \delta$	65.3666	122.6833
16	冠頂距離	X	$R \cos \delta - h_a \sin \delta$	58.6584	27.3167
17	齒頂間軸向距離	X_b	$\frac{b \cos \delta_a}{\cos \theta_a}$	19.2374	8.9587
18	小端齒頂圓直徑	d_i	$d_a - \frac{2b \sin \delta_a}{\cos \theta_a}$	43.9292	82.4485

表 4.18 除直交軸外，也可使用其計算斜交直齒傘形齒輪。

(3) Gleason 彎齒 (螺旋齒) 傘形齒輪

彎齒傘形齒輪如圖 4.12 所示，是齒筋呈螺旋線狀（通常以直徑為 d_c 之近似圓弧代替）的傘形齒輪。齒筋 d_c 和節錐母線的夾角稱為螺旋角。齒幅中央的螺旋角稱之為中央螺旋角 β_m ，只單純的稱螺旋角或 β 時，通常是指這個中央螺旋角。

表 4.21 是一般 Gleason 彎齒傘形齒輪的計算公式。

這裏所介紹的 Gleason 彎齒傘形齒輪的齒形，是齒深 $h = 1.888m$ ，頂隙 $c = 0.188m$ ，有效齒深 $h' = 1.700m$ 的矮齒齒形，使用在模數 2.1 以上的齒輪。

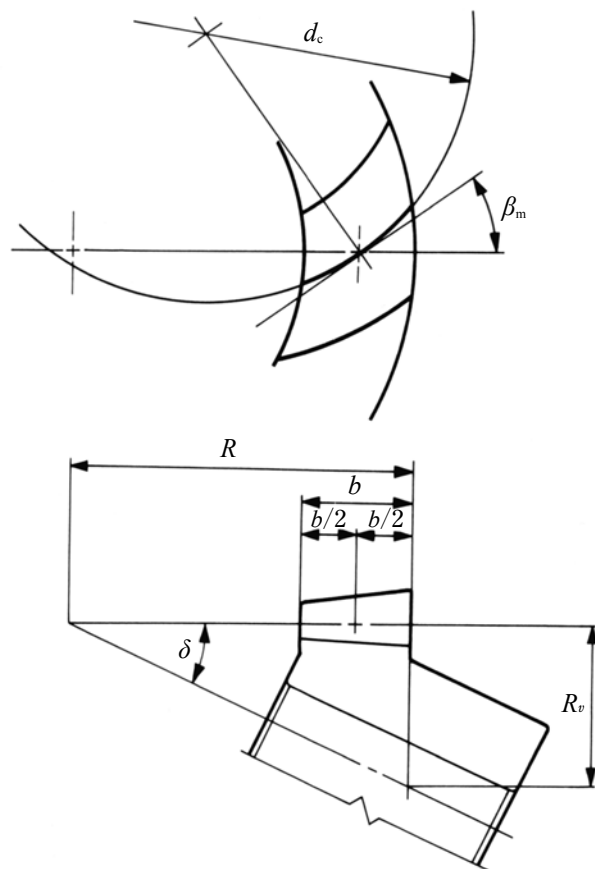


圖 4.12 彎齒傘形齒輪（左旋）

表 4.19 防止下切的最小齒數

 $\beta = 35^\circ$

齒直角壓力角	齒數的組合 (z_1 / z_2)					
20°	17/17 以上	16/18 以上	15/19 以上	14/20 以上	13/22 以上	12/26 以上

小齒輪的齒數小於 12 時，根據表 4.20 來決定齒形的尺寸。

表 4.20 小齒輪齒數不超過 12 的彎齒傘輪的尺寸

小齒輪齒數 z_1	6	7	8	9	10	11
大齒輪齒數 z_2	34 以上	33 以上	32 以上	31 以上	30 以上	29 以上
有效齒深 h'	1.500	1.560	1.610	1.650	1.680	1.695
全齒深 h	1.666	1.733	1.788	1.832	1.865	1.882
大齒輪的齒冠高 h_{a2}	0.215	0.270	0.325	0.380	0.435	0.490
小齒輪的齒冠高 h_{a1}	1.285	1.290	1.285	1.270	1.245	1.205
大齒輪的圓弧齒厚 s_2	30	0.911	0.957	0.975	0.997	1.023
	40	0.803	0.818	0.837	0.860	0.888
	50	—	0.757	0.777	0.828	0.884
	60	—	—	0.777	0.828	0.883
齒直角壓力角 α_n	20°					
螺旋角 β	$35^\circ \sim 40^\circ$					
軸角 Σ	90°					

(注) 表內資料為 $m = 1$ 時的結果。

Gleason 彎齒傘形齒輪的計算列於表 4.21.

表 4.21 Gleason 彎齒傘形齒輪的計算

序號	計算項目	記號	計 算 公 式	計 算 例	
				小齒輪 (1)	大齒輪 (2)
1	軸角	Σ		90°	
2	大端軸直角模數	m		3	
3	齒直角壓力角	α_n		20°	
4	中央螺旋角	β_m		35°	
5	齒數 (螺旋方向)	z		20 (L)	40 (R)
6	軸直角壓力角	α_t	$\tan^{-1}\left(\frac{\tan\alpha_n}{\cos\beta}\right)$	23.95680	
7	標準圓直徑	d	zm	60	120
8	標準圓錐角	δ_1	$\tan^{-1}\left(\frac{\sin\Sigma}{\frac{z_2}{z_1} + \cos\Sigma}\right)$	26.56505°	63.43495°
		δ_2	$\Sigma - \delta_1$		
9	圓錐距離	R	$\frac{d_2}{2\sin\delta_2}$	67.08204	
10	齒幅	b	希望控制在 0.3R 或 10m 以下	20	
11	齒冠高	h_{a1}	$1.700m - h_{a2}$	3.4275	1.6725
		h_{a2}	$0.460m + \left(\frac{0.390m}{\frac{z_2 \cos\delta_1}{z_1 \cos\delta_2}}\right)$		
12	齒根高	h_f	$1.888m - h_a$	2.2365	3.9915
13	齒根角	θ_f	$\tan^{-1}(h_f/R)$	1.90952°	3.40519°
14	齒頂角	θ_{a1}	θ_{f2}	3.40519°	1.90952°
		θ_{a2}	θ_{f1}		
15	齒頂圓錐角	δ_a	$\delta + \theta_a$	29.97024°	65.34447°
16	齒根圓錐角	δ_f	$\delta - \theta_f$	24.65553°	60.02976°
17	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a \cos\delta$	66.1313	121.4959
18	冠頂距離	X	$R \cos\delta - h_a \sin\delta$	58.4672	28.5041
19	齒頂間軸向距離	X_b	$\frac{b \cos\delta_a}{\cos\theta_a}$	17.3563	8.3479
20	小端齒頂圓直徑	d_i	$d_a - \frac{2b \sin\delta_a}{\cos\theta_a}$	46.1140	85.1224

用於斜交軸間的斜交 Gleason 彎齒傘形齒輪亦可使用表 4.21 計算。

齒輪組的組合為旋向相反的一對齒輪相配合。

(4) Gleason 零度傘形齒輪 (Zero Bevel Gears)

如圖 4.13 所示, 中央螺旋角 β_m 為零的傘形齒輪被稱為零度傘形齒輪。

齒輪尺寸的計算方法與 Gleason 直齒傘形齒輪相同, 可以使用表 4.17 計算。

螺旋方向為左旋與右旋齒齒輪配合使用。圖 4.13 為左旋零度傘形齒輪。

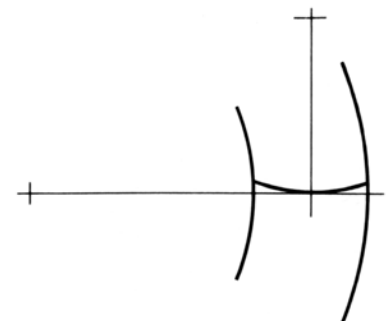


圖 4.13 零度傘形齒輪 (左旋齒)

4.5 交錯軸螺旋齒輪 (Screw Gears)

交錯軸螺旋齒輪是圓筒齒輪（螺旋齒輪）組用在交錯軸間傳動時的稱呼。

交錯軸螺旋齒輪單獨來看是螺旋齒輪，咬合狀態示如圖 4.14 所示。

交錯軸螺旋齒輪若相互間的齒直角模數 m_n 與齒直角壓力角 α_n 不相等，是無法咬合的。

齒輪在無轉位的情況下咬合時軸角 Σ 可根據標準圓筒螺旋角 β_1 、 β_2 來計算。

齒輪組的旋向相同時：

$$\Sigma = \beta_1 + \beta_2$$

齒輪組的旋向相反時：

$$\Sigma = \beta_1 - \beta_2 \text{ 或 } \Sigma = \beta_2 - \beta_1$$

(4.22)

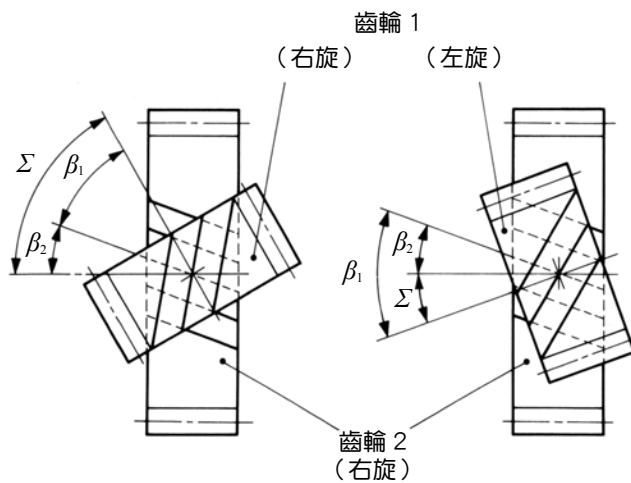


圖 4.14 交錯軸螺旋齒輪的咬合

當 $\Sigma = 0$ 時，兩軸平行，此時的齒輪稱做螺旋齒輪。當 $\Sigma \neq 0$ 時，兩軸交錯，此時的齒輪稱為交錯螺旋齒輪。

如果在轉位的情形下使用時，咬合會變得非常複雜。此時的軸角 Σ 必須根據咬合節圓筒螺旋角 β'_1 、 β'_2 來計算。

齒輪組的旋向相同時：

$$\Sigma = \beta'_1 + \beta'_2$$

齒輪組的旋向相反時：

$$\Sigma = \beta'_1 - \beta'_2 \text{ 或 } \Sigma = \beta'_2 - \beta'_1$$

(4.23)

表 4.22 中列出齒直角方式交錯軸轉位螺旋齒輪的計算。

計算無轉位的標準交錯螺旋齒輪時，計算表中以 $x_{n1} = x_{n2} = 0$ 代入即可。

表 4.22 齒直角方式轉位交錯軸螺旋齒輪的計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				小齒輪(1)	大齒輪(2)
1	齒直角模數	m_n		3	
2	齒直角壓力角	α_n		20°	
3	節圓筒螺旋角	β		20°	30°
4	齒數(螺旋方向)	z		15 (R)	24 (R)
5	等價正齒輪齒數	z_v	$\frac{z}{\cos^3 \beta}$	18.0773	36.9504
6	軸直角壓力角	α_t	$\tan^{-1} \left(\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \right)$	21.1728°	22.7959°
7	齒直角轉位係數	x_n		0.4	0.2
8	α'_n 的漸開線函數	$\text{inv} \alpha'_n$	$2 \tan \alpha_n \left(\frac{x_{n1} + x_{n2}}{z_{v1} + z_{v2}} \right) + \text{inv} \alpha_n$	0.0228415	
9	齒直角咬合角	α'_n	由漸開線函數表中查出	22.9338°	
10	軸直角咬合角	α'_t	$\tan^{-1} \left(\frac{\tan \alpha'_n}{\cos \beta} \right)$	24.2404°	26.0386°
11	中心距離修正係數	y	$\frac{1}{2} (z_{v1} + z_{v2}) \left(\frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha'_n} - 1 \right)$	0.55977	
12	中心距離	a	$\left(\frac{z_1}{2 \cos \beta_1} + \frac{z_2}{2 \cos \beta_2} + y \right) m_n$	67.1925	
13	標準圓直徑	d	$\frac{z m_n}{\cos \beta}$	47.8880	83.1384
14	基圓直徑	d_b	$d \cos \alpha_t$	44.6553	76.6445
15	咬合節圓直徑	d'_1	$2a \frac{d_1}{d_1 + d_2}$	49.1155	85.2695
		d'_2	$2a \frac{d_2}{d_1 + d_2}$		
16	咬合節圓筒螺旋角	β'	$\tan^{-1} \left(\frac{d'}{d} \tan \beta \right)$	20.4706°	30.6319°
17	軸角	Σ	$\beta'_1 + \beta'_2$ 或 $\beta'_1 - \beta'_2$	51.1025°	
18	齒冠高	h_{a1}	$(1 + y - x_{n2}) m_n$	4.0793	3.4793
		h_{a2}	$(1 + y - x_{n1}) m_n$		
19	全齒深	h	$\{ 2.25 + y - (x_{n1} + x_{n2}) \} m_n$	6.6293	
20	齒頂圓直徑	d_a	$d + 2h_a$	56.0466	90.0970
21	齒底圓直徑	d_f	$d_a - 2h$	42.7880	76.8384

無轉位標準交錯軸螺旋齒輪的咬合時, 下列的關係式成立。

$$\left. \begin{aligned} d'_1 &= d_1 & d'_2 &= d_2 \\ \beta'_1 &= \beta_1 & \beta'_2 &= \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

4.6 圓筒蝸輪蝸桿 (Worms & Worm Gears)

圓筒蝸輪蝸桿是有螺紋狀輪齒的蝸桿和與之咬合的蝸輪之齒輪組。在交錯軸間使用的齒輪以蝸輪蝸桿組最為常見。一般軸角為 $\Sigma = 90^\circ$ 雙齒(牙)以上的蝸桿一般稱為多牙蝸桿。

如圖 4.15 所示, 蝸桿是擁有一齒(牙)或以, 上具螺紋狀齒的齒輪。在節圓筒上, 螺旋線以 γ 為其節圓導角。螺旋線回轉一周時, 相應的螺旋線移動距離稱為導程 p_z 。

根據 JIS B 1723 標準規定, 圓筒蝸桿的齒形有下列四種規定。

表 4.23 圓筒蝸桿軸向模數

1	1.25	1.60	2.00	2.50	3.15	4.00	5.00
6.30	8.00	10.00	12.50	16.00	20.00	25.00	

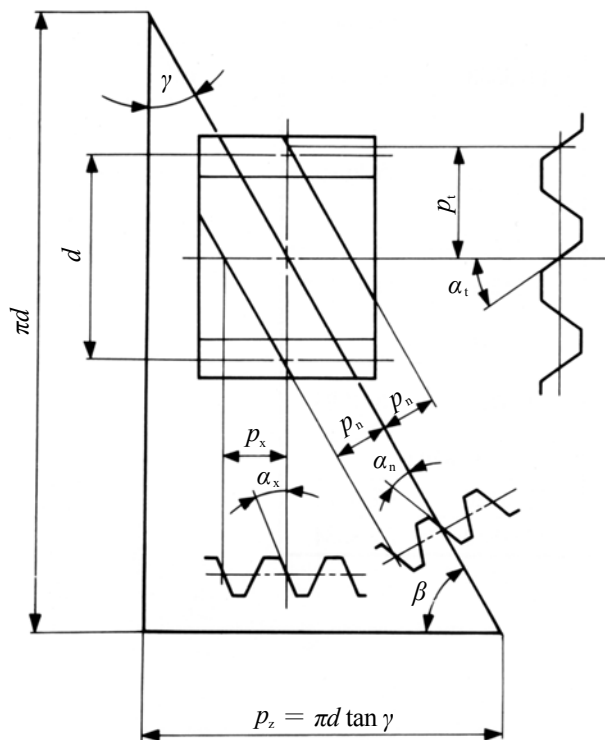


圖 4.15 圓筒蝸桿(右旋)

- 1 形：軸平面之齒形為梯形
 - 2 形：齒溝在齒直角斷面中為梯形
 - 3 形：用軸平面之齒形為梯形的切削刀具(銑刀或研磨砂輪), 以刀具軸與蝸桿軸之夾角(軸角)為 γ 角(導角)時, 所加工出的齒形
 - 4 形：軸直角斷面之齒形為漸開線齒形
- 其中, 3 形的齒形最為普及。
- 33 形蝸桿的齒直角壓力角 α_n 有比刀具壓力角 α_o 小的傾向。

在 JIS 標準中規定, 3 形齒形以軸向模數 m_x 及刀具壓力角 $\alpha_o = 20^\circ$ 為標準。在製作這種蝸輪時, 必須以專用的蝸輪滾齒刀加工。

軸向模數 m_x 以 R10 為採用的標準數, 數值列於表 4.23。

因為蝸輪蝸桿組是一種傳達交錯軸間運動的齒輪, 所以蝸桿的軸平面和蝸輪的軸平面不一致。

蝸桿的軸平面是蝸輪的軸直角斷面(正面)。

蝸桿的軸直角斷面(正面)是蝸輪的軸平面。

唯一相同一致的斷面是齒直角斷面。

因此, 以齒直角斷面上的齒直角模數 m_n 為標準來製作蝸輪的方法也是相當普遍的。

根據這種方式, 我們可利用市販的滾齒刀(不是專用的滾齒刀)即可切削蝸輪, 非常方便。

下面將蝸輪組在軸平面, 軸直角斷面(正面)和齒直角斷面上的模數, 壓力角, 節距及導程的關係表列於 4.24。

表 4.24 蝸桿蝸輪比較表

蝸 桿		
軸 平 面	齒直角斷面	軸直角斷面(正面)
$m_x = \frac{m_n}{\cos \gamma}$	m_n	$m_t = \frac{m_n}{\sin \gamma}$
$\alpha_x = \tan^{-1}\left(\frac{\tan \alpha_n}{\cos \gamma}\right)$	α_n	$\alpha_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan \alpha_n}{\sin \gamma}\right)$
$p_x = \pi m_x$	$p_n = \pi m_n$	$p_t = \pi m_t$
$p_z = \pi m_x z$	$p_z = \frac{\pi m_n z}{\cos \gamma}$	$p_z = \pi m_t z \tan \gamma$
軸直角斷面(正面)	齒直角斷面	軸 平 面
蝸 輪		

欲對表 4.24 中相互關係有進一步的理解，可參考圖 4.15 的說明。其中各項諸元之間的關係式與螺旋齒輪的計算公式 (4.16) 及 (4.17) 相同，只要將公式中的 β 角換成 $(90^\circ - \gamma)$ 代入即可。因此，可以換個方式說，以 γ 角為節圓筒導角的蝸桿，近似於以 $(90^\circ - \gamma)$ 角為螺旋角的螺旋齒輪。

(1) 軸向模數方式蝸桿蝸輪

這種方式的蝸輪蝸桿是以軸向模數 m_x ，齒直角壓力角 $\alpha_n = 20^\circ$ 為標準來計算。參考表 4.25。

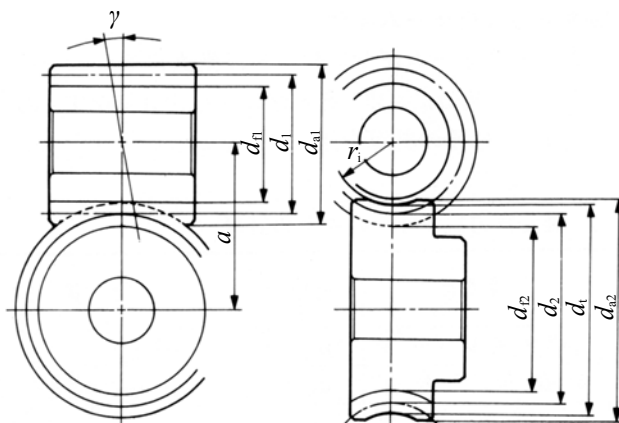


圖 4.16 圓筒蝸桿蝸輪的尺寸

表 4.25 軸向模數方式蝸桿蝸輪計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				蝸桿 (1)	蝸輪 (2)
1	軸向模數	m_x		3	
2	齒直角齒形角	α_n		(20°)	
3	牙數·齒數	z		右雙頭	30 (R)
4	標準圓直徑	d_1 d_2	(Qm_x) 注 1 $z_2 m_x$	44.000	90.000
5	節圓筒導角	γ	$\tan^{-1}\left(\frac{m_x z_1}{d_1}\right)$	7.76517°	
6	軸直角轉位係	x_{12}		—	0
7	中心距離	a	$\frac{d_1 + d_2}{2} + x_{12} m_x$	67.000	
8	齒冠高	h_{a1} h_{a2}	$1.00 m_x$ $(1.00 + x_{12}) m_x$	3.000	3.000
9	全齒深	h	$2.25 m_x$	6.750	
10	齒頂圓直徑	d_{a1} d_{a2}	$d_1 + 2h_{a1}$ $d_2 + 2h_{a2} + m_x$ 注 2	50.000	99.000
11	喉徑	d_t	$d_2 + 2h_{a2}$	—	96.000
12	喉圓半徑	r_i	$\frac{d_1}{2} - h_{a1}$	—	19.000
13	齒底圓直徑	d_{f1} d_{f2}	$d_{a1} - 2h$ $d_t - 2h$	36.500	82.500

注 1 · 直徑係數 Q 是蝸桿的節圓直徑 d_1 與軸向模數 m_x 之比，即

$$Q = \frac{d_1}{m_x}$$

注 2 · 蝸輪齒頂圓直徑 d_{a2} 的計算還有許多其他的方法。

注 3 · 蝸桿的齒幅 b_1 若能滿足 $\pi m_x (4.5 + 0.02z_2)$ 即可。

注 4 · 由於蝸輪的有效齒幅 $b' = 2m_x \sqrt{Q + 1}$ ，因此，蝸輪的齒幅 b_2 能達到 $b' + 1.5m_x$ 以上即可。

(2) 齒直角方式蝸輪蝸桿

此方式的蝸輪蝸桿以齒直角模數 m_n ，齒直角壓力角 $\alpha_n = 20^\circ$ 為標準進行齒輪的計算。表 4.26 為計算表。

表 4.26 齒直角方式蝸輪蝸桿的計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例	
				蝸桿(1)	蝸輪(2)
1	齒直角模數	m_n		3	
2	齒直角壓力角	α_n		(20°)	
3	牙數·齒數	z		右雙牙	30 (R)
4	蝸桿標準圓直徑	d_1		44.000	—
5	節圓筒導角	γ	$\sin^{-1}\left(\frac{m_n z_1}{d_1}\right)$	7.83748°	
6	蝸輪節圓徑	d_2	$\frac{z_2 m_n}{\cos \gamma}$	—	90.8486
7	齒直角轉位係數	x_{n2}		—	-0.1414
8	中心距離	a	$\frac{d_1 + d_2}{2} + x_{n2} m_n$	67.000	
9	齒冠高	h_{a1} h_{a2}	$1.00 m_n$ $(1.00 + x_{n2}) m_n$	3.000	2.5758
10	全齒深	h	$2.25 m_n$	6.75	
11	齒頂圓直徑	d_{a1} d_{a2}	$d_1 + 2h_{a1}$ $d_2 + 2h_{a2} + m_n$	50.000	99.000
12	喉徑	d_i	$d_2 + 2h_{a2}$	—	96.000
13	喉圓半徑	r_i	$\frac{d_1}{2} - h_{a1}$	—	19.000
14	齒底圓直徑	d_{f1} d_{f2}	$d_{a1} - 2h$ $d_i - 2h$	36.500	82.500

關於註釋請參照表 4.25。

(3) 蝸輪齒輪的齒面削鼓形加工

對於蝸輪而言，比起其他齒輪，齒面削鼓形加工尤為重要。

經過齒面削鼓形加工，可以防止因為齒輪的安裝誤差等引起的單側齒承，確保形成油膜所必須的油料吸入間隙。

齒面削鼓形加工的四種方法介紹如下。

(a) 使用比蝸桿的標準圓大的滾齒刀加工蝸輪

使用與蝸桿相同標準圓直徑的滾齒刀加工蝸輪時，蝸輪的齒面削鼓形加工量為零。

像這樣完全沒有誤差加工出來的蝸輪組，在無誤差的情形下裝配後，齒承應該是全面的。

這裡會出現主要的兩個問題，一是油料吸入間隙無法確保，二是像這樣無誤差的理想狀況是不實際的，結果仍舊會形成單側齒承。

想要解決這些問題，便需要如圖 4.17 所示，使用大於標準圓直徑的滾齒刀滾製蝸輪，這樣會使齒承集中在齒幅的中央部，便能確保油料吸入間隙。

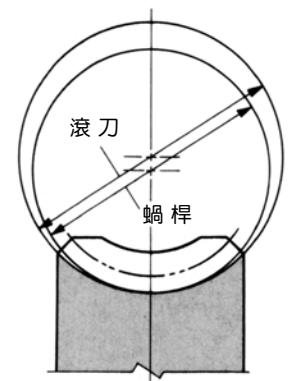


圖 4.17 使用大直徑滾刀的切齒方法

(b) 將滾齒刀軸沿齒幅方向上下微量 Δh 移動之切齒方法

使用滾齒機切削蝸輪時，在滾齒刀軸與蝸輪的中心對正下，完成正常的全深度切齒後，再將滾齒刀軸的中心向上移動 Δh 量切齒，然後按同樣的步驟向下移動 Δh 量切齒。但是，上下移動時，必須是要沿著齒筋方向行進才行。因此需要移動的方向，是滾齒刀在與導角相吻合的導程方向上下移動，或是上下調整蝸輪毛胚的位置，並將毛胚沿圓周方向微量調整固定之後加工。由此達到齒面削鼓形的加工。

(c) 滾刀軸左右傾斜 $\Delta\theta$ 角的切齒方法

使用滾齒機加工蝸輪齒時，一般而言，滾齒刀軸會先按計算過的安裝角設定並加工，然後再將滾齒刀軸設定為向左傾斜 $\Delta\theta$ 角後切齒。再按同樣的步驟向右傾斜後切齒，這樣便達到齒面削鼓形的加工。

上述對蝸輪的削鼓形加工方法中，使用最常使用的是 (a) 方法。(b) 和 (c) 則幾乎不被使用。

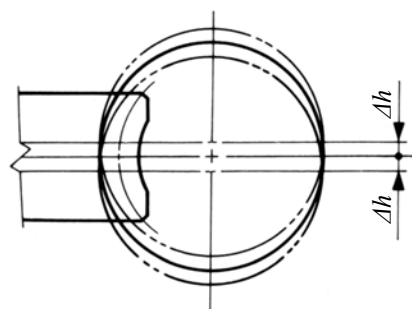


圖 4.18 上下移動法

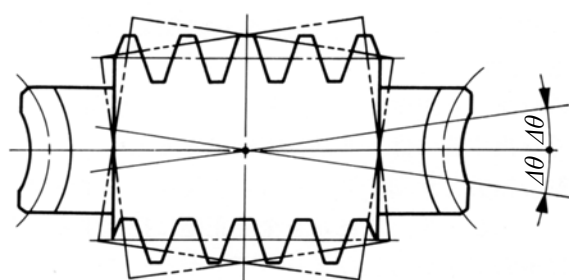


圖 4.19 左右傾斜法

下面介紹蝸桿的鼓形加工方法。

(d) 將蝸桿的軸平面壓力角加工成比蝸輪的軸平面壓力角來得大，是為對蝸桿的削鼓形加工法

這個方法可以不改變對於齒輪來說最為重要的軸平面上的法線節距，只需改變軸平面壓力角與軸向節距，即可達成蝸桿的削鼓形加工。

$$p_x \cos \alpha_x = p_x' \cos \alpha_x' \quad (4.25)$$

由於修整後的軸平面壓力角 α_x 比修整前的 α_x' 要來得大，因此若想滿足公式 4.25，就必須將修整後的軸向節距 p_x 也增大才行。

也就是說，這種方法是將軸平面壓力角 α_x 與軸向節距 p_x 增大的修整法。

圖 4.21 中，經過修整的蝸桿與標準蝸輪咬合時，圖中 A 點的間隙（削鼓形修整量）可使用以下公示計算其近似值。

$$\text{削鼓形修整量} \doteq k \frac{p_x - p_x'}{p_x'} \frac{d_1}{2} \quad (4.26)$$

其中 d_1 ：蝸桿的標準圓直徑

k ：係數，可以從表 4.27 或圖 4.20 中查出。

表 4.27 係數 k 值

α_x	14.5°	17.5°	20°	22.5°
k	0.55	0.46	0.41	0.375

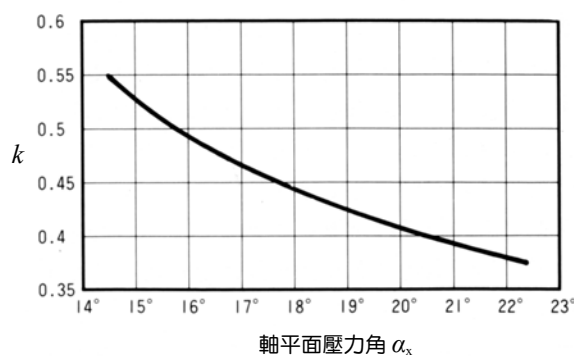
圖 4.20 係數 k 之值

表 4.28 列出了蜗桿的削鼓形修整計算。

表 4.28 蜗桿的削鼓形加工計算

序號	計算項目	記號	計算公式	計算例
1	軸向模數	m_x'	注：這是修形前的數值。	3
2	齒直角壓力角	α_n'		20°
3	蜗桿的牙數	z_1		2
4	蜗桿的標準圓直徑	d_1		44.000
5	節圓筒導角	γ'	$\tan^{-1}\left(\frac{m_x' z_1}{d_1}\right)$	7.765166°
6	軸平面壓力角	α_x'	$\tan^{-1}\left(\frac{\tan \alpha_n'}{\cos \gamma'}\right)$	20.170236°
7	軸向節距	p_x'	$\pi m_x'$	9.424778
8	導程	p_z'	$\pi m_x' z_1$	18.849556
9	鼓形修形量	C_R	根據齒承的比例來決定	0.04
10	係數	k	從表 4.27 中查出	0.41
※修整後的數據				
11	軸向節距	p_x	$p_x' \left(\frac{2C_R}{kd_1} + 1 \right)$	9.466573
12	軸平面壓力角	α_x	$\cos^{-1}\left(\frac{p_x'}{p_x} \cos \alpha_x'\right)$	20.847973°
13	軸向模數	m_x	$\frac{p_x}{\pi}$	3.013304
14	節圓筒導角	γ	$\tan^{-1}\left(\frac{m_x z_1}{d_1}\right)$	7.799179°
15	齒直角壓力角	α_n	$\tan^{-1}(\tan \alpha_x \cos \gamma)$	20.671494°
16	導程	p_z	$\pi m_x z_1$	18.933146

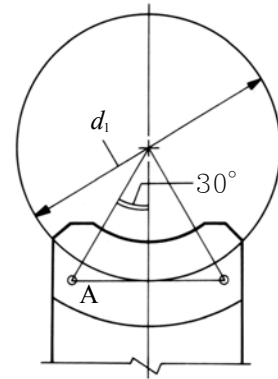


圖 4.21 計算削鼓形修整量的 A 點

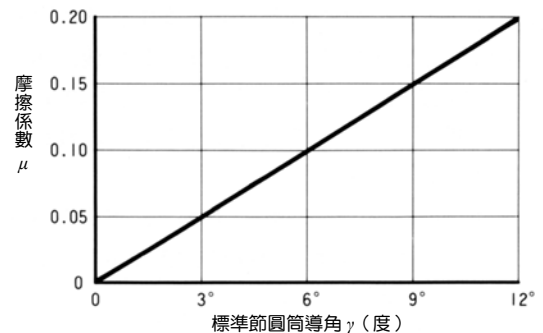


圖 4.22 標準節圓筒導角 γ 與摩擦係數 μ 的自鎖界限

$$F_{t1} = F_n (\cos \alpha_n \sin \gamma - \mu \cos \gamma) \quad (4.27)$$

(4) 蜗輪組的自鎖作用

自鎖作用是蜗輪組的特點之一。

自鎖作用是指無法由蜗輪驅動蜗桿的狀態。利用這種特性使用在升降裝置中，可以簡單地保持停止位置，另外在其他方面亦有很多有效的用途。

受各種因素的影響，蜗輪組分能自鎖作用和不能自鎖作用兩種。

在不計算軸承損失及攪拌潤滑油損失等影響的理想狀態下，判斷是否會發生自鎖作用是取決於齒面的作用力。於齒輪中級篇 8.5 蜗輪組上的作用力 (P427) 敘述中，在蜗輪做為驅動齒輪時，蜗桿的切線力 F_{t1} 可由下式算得。

切向力 F_{t1} 大於零時，不能產生自鎖作用。從公式中看出，齒直角壓力角 α_n ，節圓筒導角 γ 和摩擦係數 μ 這三個要素影響自鎖作用的產生。其中靜摩擦係數 μ 受到潤滑狀況及齒面表面粗度等的影響，是不確定的因素。

公式 (4.27) 中，如果設 $F_{t1} = 0$ ， $\alpha_n = 20^\circ$ 的話，分度圓柱導角 γ 與摩擦係數 μ 的關係如圖 4.22 所示。

在實際的蜗輪組中，摩擦係數 μ 值的正確值計算不易。而且，實際上由於軸承損失及潤滑油攪拌損失等也會引起制動作用，因此要想完全正確地掌握這些因素的變化非常困難。所以，對於蜗輪組是否能自鎖的判斷也就相當的困難了。

不過，可以很確定地說，標準圓筒導角 γ 越小，蜗輪組的自鎖性也就越高。